Вектори на площині (збірник прикладів)

Дата останнього оновлення: 14.04.2008
Джерело (Web-сайт)**:** http://formula.co.ua
Комп'ютерна верстка: Виспянський Ігор

Приклад 1.

Обчислити скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{c}$:

$$|\vec{a}| = 1, |\vec{c}| = 4, (\widehat{\bar{a}; \bar{c}}) = 60°.$$

Розв'язання.

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\widehat{\bar{a}; \bar{c}}) = 1 \cdot 4 \cdot cos(60°) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Відповідь: $\mathbf{2}$.

Приклад 2.

Обчислити скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{c}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{c}| = 5, (\widehat{\bar{a}; \bar{c}}) = 30°.$$

Розв'язання.

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\widehat{\bar{a}; \bar{c}}) = \sqrt{3} \cdot 5 \cdot cos(30°) = \sqrt{3} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot 5}{2} = 7{,}5.$$

Відповідь: $\mathbf{7{,}5}$.

Приклад 3.

Обчислити скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{c}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{c}| = 5, (\widehat{\bar{a}; \bar{c}}) = 45°.$$

Розв'язання.

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\widehat{\bar{a}; \bar{c}}) = \sqrt{2} \cdot 5 \cdot cos(45°) = \sqrt{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5.$$

Відповідь: $\mathbf{5}$.

Приклад 4.

Обчислити скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{c}$:

$$|\vec{a}| = 2, |\vec{c}| = 3, (\widehat{\vec{a}; \vec{c}}) = 60°.$$

Розв'язання.

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}; \vec{c}}) = 2 \cdot 3 \cdot cos(60°) = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Відповідь: $\mathbf{3}$.

Приклад 5.

Відомо, що скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{c}$ дорівнює 3, а кут між цими векторами дорівнює $60°$. Обчислити довжину вектора $\vec{c}$, якщо $|\vec{a}| = 1$.

Розв'язання.

З формули

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}; \vec{c}})$$

отримуємо

$$|\vec{c}| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}; \vec{c}})} = \frac{3}{1 \cdot \frac{1}{2}} = 3 \cdot 2 = 6.$$

Відповідь: $\mathbf{6}$.

Приклад 6.

Відомо, що $|\vec{a}| = 1, |\vec{c}| = 5$ і $\vec{a} \cdot \vec{c} = 2{,}5$. Обчислити кут (у градусах) між векторами $\vec{a}$ і $\vec{c}$.

Розв'язання.

З формули

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}; \vec{c}})$$

отримуємо

$$\cos(\widehat{\vec{a};\vec{c}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|} = \frac{2{,}5}{1\cdot 5} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}.$$

Отже, кут (у градусах) між векторами

$$(\widehat{\vec{a};\vec{c}}) = 60°.$$

Відповідь: $\mathbf{60}$.

Приклад 7.

Обчислити довжину вектора $\vec{a}(5;12)$.

Розв’язання.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13.$$

Відповідь: $\mathbf{13}$.

Приклад 8.

Обчислити довжину вектора $\vec{a} + \vec{c}$, якщо $\vec{a}(2;1)$ і $\vec{c}(1;3)$, тобто $|\vec{a} + \vec{c}|$.

Розв’язання.

$$|\vec{a} + \vec{c}| = \sqrt{(2+1)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Відповідь: $\mathbf{5}$.

Приклад 9.

Обчислити довжину вектора $\vec{a} - \vec{c}$, якщо $\vec{a}(17;10)$ і $\vec{c}(2;2)$, тобто $|\vec{a} - \vec{c}|$.

Розв’язання.

$$|\vec{a} - \vec{c}| = \sqrt{(17-2)^2 + (10-2)^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17.$$

Відповідь: $\mathbf{17}$.

Приклад 10.

Обчислити кут (у градусах) між векторами $\vec{a}$ і $\vec{c}$, якщо $\vec{a}(-2;-2)$ і $\vec{c}(5;5)$.

Розв’язання.

З формули

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos(\widehat{\bar{a};\bar{c}})$$

і

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=a_x\cdot c_x+a_y\cdot c_y$$

отримуємо

$$\cos(\widehat{\bar{a};\bar{c}})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|}=\frac{a_x\cdot c_x+a_y\cdot c_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}\cdot\sqrt{c_x^2+c_y^2}}.$$

$$\cos(\widehat{\bar{a};\bar{c}})=\frac{-2\cdot 5+(-2)\cdot 5}{\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{5^2+5^2}}=\frac{-10-10}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{50}}=\frac{-20}{\sqrt{400}}=\frac{-20}{20}=-1.$$

Отже, кут (у градусах) між векторами

$$(\widehat{\bar{a};\bar{c}})=180°.$$

Відповідь: $\mathbf{180}$.

Приклад 11.

Визначити значення x, при якому вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ є колінеарними, якщо $\vec{a}(x;5)$ і $\vec{c}(2;1)$.

Розв’язання.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ колінеарні тоді і лише тоді, коли їх відповідні координати пропорційні, тобто

$$\frac{a_x}{c_x}=\frac{a_y}{c_y}.$$

Отже, щоб вектори були колінеарними має виконуватись пропорція

$$\frac{x}{2}=\frac{5}{1}\ \rightarrow\ x=10.$$

Відповідь: $\mathbf{10}$.

Приклад 12.

Визначити значення x, при якому вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ є перпендикулярними, якщо $\vec{a}(x;1)$ і $\vec{c}(1;2)$.

Розв'язання.

Умова перпендикулярності:

$$a_x c_x + a_y c_y = 0.$$

Маємо

$$x \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 0,$$

$$x + 2 = 0,$$

$$x = -2.$$

Відповідь: $\mathbf{-2}$.