

Збірник прикладів на тему: "Планіметрія (трикутник)"

Уклад: Висп'янський Ігор (e-mail: virua@ukr.net)

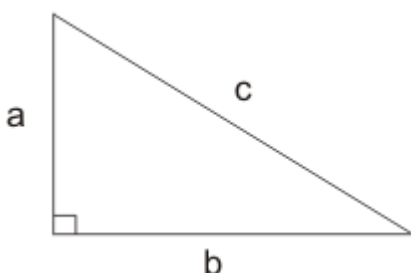
Дата останнього оновлення: 19.07.07

Веб-сайт: <http://www.formula.co.ua>

Приклад 1.

Довжини катетів прямокутного трикутника дорівнюють 5 і 12. Обчислити довжину гіпотенузи трикутника.

Розв'язання.



Дано: $a = 5$, $b = 12$

Знайти: c

Використаємо теорему Піфагора, яка звучить так: у прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів, тобто

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

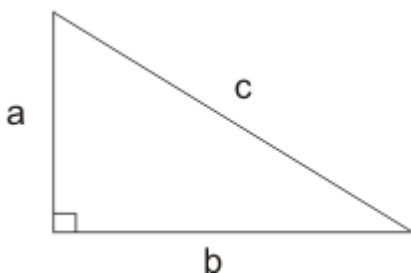
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13.$$

Відповідь: 13.

Приклад 2.

Довжина гіпотенузи прямокутного трикутника дорівнюють 13, а одного з катетів – 5. Обчислити довжину другого катета.

Розв'язання.



Дано: $c = 13$, $a = 5$

Знайти: b

Використаємо теорему Піфагора, тобто

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

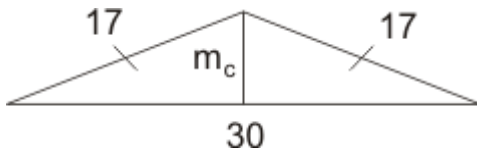
$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12.$$

Відповідь: 12.

Приклад 3.

Довжини сторін трикутника дорівнюють 17, 17 і 30. Знайти медіану трикутника, що опущена на більшу сторону.

Розв'язання.



Дано: $a = b = 17$, $c = 30$

Знайти: m_c

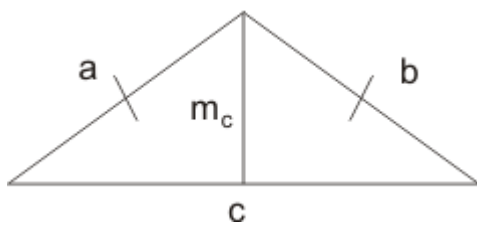
$$m_c = \sqrt{17^2 - \left(\frac{30}{2}\right)^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{289 - 225} = \sqrt{64} = 8.$$

Відповідь: 8.

Приклад 4.

Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 15, а довжина медіани, опущеної на основу, – 9. Знайти основу трикутника.

Розв'язання.



Дано: $a = b = 15$, $m_c = 9$

Знайти: c

$$m_c^2 = b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 \Rightarrow c = 2\sqrt{b^2 - m_c^2}.$$

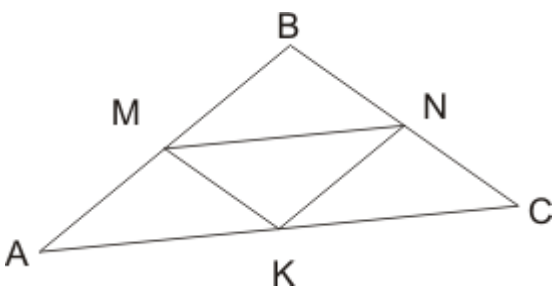
$$c = 2\sqrt{15^2 - 9^2} = 2\sqrt{225 - 81} = 2\sqrt{144} = 24.$$

Відповідь: 24.

Приклад 5.

Сторони трикутника дорівнюють 5, 7 і 10. Обчислити периметр трикутника, вершинами якого є середини сторін даного трикутника.

Розв'язання.



Дано: $BC = 5$, $AB = 7$, $AC = 10$

Знайти: P_{MNK}

$$P_{ABC} = 5 + 7 + 10 = 22.$$

$$P_{MNK} = \frac{P_{ABC}}{2} = \frac{22}{2} = 11, \text{ бо}$$

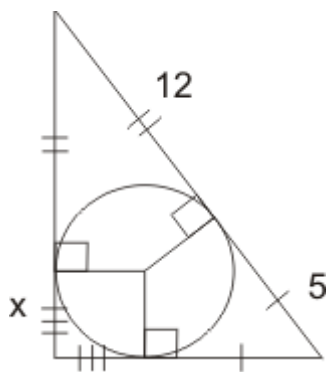
$$MN = \frac{1}{2} AC, MK = \frac{1}{2} BC \text{ і } NK = \frac{1}{2} AB.$$

Відповідь: 11.

Приклад 6.

У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу на відрізки довжиною 5 і 12. Обчислити довжину більшого катета трикутника.

Розв'язання.



$$(x+12)^2 + (x+5)^2 = 17^2$$

$$x^2 + 24x + 144 + x^2 + 10x + 25 = 289$$

$$2x^2 + 34x - 120 = 0$$

$$x^2 + 17x - 60 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 289 + 240 = 529.$$

$$x_1 = \frac{-17+23}{2} = 3,$$

$$x_2 = \frac{-17-23}{2} = -20 \text{ – сторонній корінь, бо}$$

довжина не може бути від'ємною.

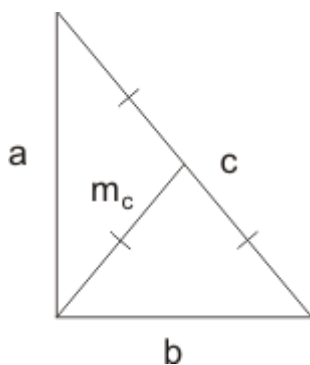
Отже, більший катет дорівнює $3 + 12 = 15$.

Відповідь: 15.

Приклад 7.

Медіана, опущена на гіпотенузу прямокутного трикутника, дорівнює 5, а один з катетів – 6. Знайти радіус вписаного кола.

Розв'язання.



Дано: $m_c = 5$, $b = 6$

Знайти: r

$$c = 2 \cdot 5 = 10,$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8,$$

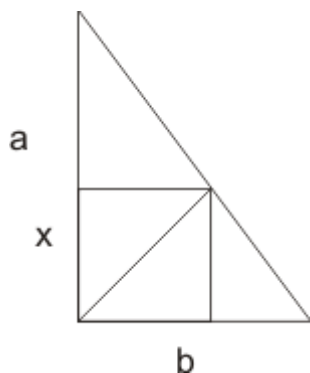
$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{8+6-10}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Відповідь: 2.

Приклад 8.

У прямокутний трикутник з катетами 3 і 7 вписано квадрат, що має з трикутником спільний прямий кут. Обчислити периметр квадрата.

Розв'язання.



Дано: $a = 7$, $b = 3$

Знайти: $P_{\text{квадр}}$

$$\frac{b}{x} = \frac{a}{a-x}$$

$$\frac{3}{x} = \frac{7}{7-x}$$

$$21 - 3x = 7x$$

$$21 = 10x$$

$$x = 2,1$$

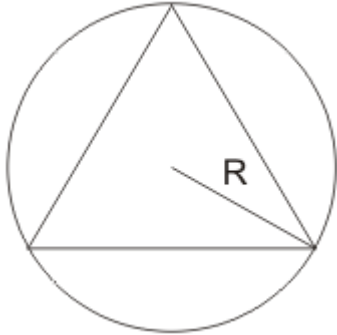
$$P_{\text{квадр}} = 4 \cdot 2,1 = 8,4.$$

Відповідь: 8,4.

Приклад 9.

Площа рівностороннього трикутника дорівнює $12\sqrt{3}$. Обчислити радіус кола, описаного навколо цього трикутника.

Розв'язання.



Дано: $S_{\text{трик}} = 12\sqrt{3}$

Знайти: R

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}, S_{\text{трик}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3} \Rightarrow \frac{a^2}{4} = 12 \Rightarrow a^2 = 48.$$

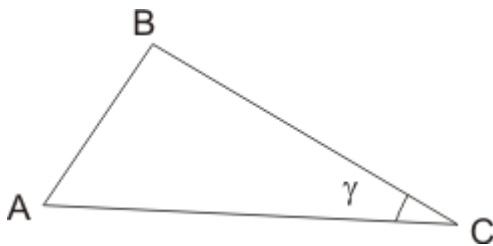
$$R = \frac{\sqrt{48} \cdot 3}{3} = \frac{\sqrt{144}}{3} = \frac{12}{3} = 4.$$

Відповідь: 4.

Приклад 10.

Довжини сторін трикутника дорівнюють 2, 4 і 5. Обчислити косинус кута трикутника, що лежить навпроти найменшої сторони.

Розв'язання.



Дано: $AB = 2, BC = 4, AC = 5$

Знайти: $\cos \gamma$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \gamma$$

$$AB^2 - AC^2 - BC^2 = -2AC \cdot BC \cdot \cos \gamma$$

$$AC^2 + BC^2 - AB^2 = 2AC \cdot BC \cdot \cos \gamma$$

$$\cos \gamma = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC}$$

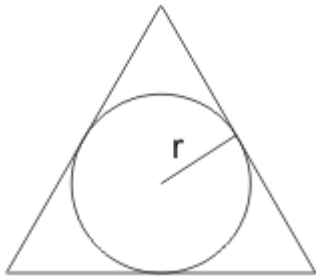
$$\cos \gamma = \frac{5^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{25 + 16 - 4}{40} = \frac{37}{40} = 0,925$$

Відповідь: 0,925.

Приклад 11.

Площа рівностороннього трикутника дорівнює $27\sqrt{3}$. Обчислити радіус кола, вписаного у цей трикутник.

Розв'язання.



Дано: $S_{\text{трик}} = 27\sqrt{3}$

Знайти: r

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}, S_{\text{трик}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3} \Rightarrow \frac{a^2}{4} = 27 \Rightarrow a^2 = 108.$$

$$r = \frac{\sqrt{108} \cdot \sqrt{3}}{6} = \frac{18}{6} = 3.$$

Відповідь: 3.