**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ (МОНУ)**

**КІРОВОГРАДСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**імені В.ВИННИЧЕНКА (КДПУ)**

Кафедра прикладної математики, статистики та економіки

Узгоджено Затверджено

УДК 51(09)

Інв. № 9.53.Р.М.2010

**РЕФЕРАТ**

з історії математики

студента 53 групи

фізико-математичного факультету

Кочерженка Дмитра Віталійовича

на тему:

**«ІСТОРІЯ РОЗВИТКУ ПОНЯТТЯ ІНТЕГРАЛ»**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Науковий керівник: |  | Філер |
| професор кафедри  прикладної математики, |  | Залмен  Юхимович |
| статистики та економіки, |  |  |
| доктор технічних наук |  |  |

Кіровоград 2010

АНОТАЦІЯ

**Стор. 37, табл. 2, рис. 8, бібліогр. 4**

ІНТЕГРАЛ, ІСТОРІЯ, ЛЕЙБНІЦ, ЕЙЛЕР, КОШІ, РІМАН

У рефераті подано основні періоди розвитку поняття інтеграл: від першого його застосування до сучасного стану. Вагомий внесок у розвиток інтегралу зробили Лейбніц, брати Бернуллі, Ейлер, Ньютон, Коші, Ріман, Лебег та їх послідовники Лузін, Хінчін та інші. Сучасний символ інтегралу був введений Лейбніцом в 1675 році, який був утворений з букви S – скорочення слова сума (від лат. *summa*). Символ визначеного інтегралу вперше використав Жан Батіст Жозеф Фур’є, приблизно в 1819-1920 рр.

АННОТАЦИЯ

**Стор. 37, табл.2, рис. 8, бібліогр. 4**

ИНТЕГРАЛ, ИСТОРИЯ, ЛЕЙБНИЦ, ЭЙЛЕР, КОШИ, РИМАН

В реферате поданы основные периоды развития понятия интеграл: от первого его использования к современному состоянию. Весомый вклад в развитие интегралу сделали Лейбниц, братья Бернулли, Эйлер, Ньютон, Коши, Риман, Лебег и их последователи Лузин, Хинчин и другие. Современный символ интегралу был введен Лейбницем в 1675 году, который был образован из буквы S – сокращения слова сумма (от лат. *summa*). Символ определенный интегралу впервые использовал Жан Батист Жозеф Фурье, приблизительно в 1819-1920 гг.

ANNOTATION

**Pict. 8, tabl.2, pages 37, lit. 4**

INTEGRAL, HISTORY, LEYBNIC, EULER, KOSHI, RIMAN

In an abstract the basic periods of development of concept are given integral: from his first appendix to the modern state. A ponderable contribution to development an integral was done Leybnic, to take Bernulli, Euler, Newton, Koshi, Riman, Lebesgue and their followers of Luzin, Khinchin et al. Modern character to the integral was entered Leybnicom in 1675 year, which was formed from the letter of S – reduction of word sum (from lat. *summa*). Character certain first Jean Batist utillized an integral Joseph Fourier, approximately in 1819-1920.

**ЗМІСТ**

ВСТУП……………………………………………………………………………4

1. ЗАРОДЖЕННЯ ТА РОЗВИТОК ІДЕЇ………………………………………6
   1. Метод вичерпування;……………………………………………..­­......–
   2. Механічний метод Архімеда;…………………………………………8
2. ВИНИКНЕННЯ ТА ОФОРМЛЕННЯ ІНТЕГРАЛУ……………………...11
3. ІНТЕГРАЛИ КОШІ І РІМАН………………………………………………15
4. ПОДАЛЬШИЙ РОЗВИТОК ІНТЕГРАЛУ………………………………...19

ВИСНОВКИ………………………………………………………………...…..22

ЛІТЕРАТУРА………………………………………………………………..….23

ДОДАТКИ……………………………………………………………………....24

Д.1. ВПЛИВ СОНЯЧНОЇ АКТИВНОСТІ НА ТВОРЧІСТЬ ОЛЕКСАНДРА ЯКОВИЧА ХІНЧИНА ………………………………..………………...…..–

**ВСТУП**

Поняття інтеграла пронизує всю сучасну математику. І не тільки це – в науках фізичного і технічного циклів знаходять застосування різні варіації інтеграла. Варто розкрити будь-яку книгу, що відноситься до точних наук, як зустрінеться знак інтеграла і пропозиції, включаючи слово «інтеграл». Більш того, останнім часом увійшли до ужитку такі терміни, як, наприклад, «інтегральна схема», «економічна інтеграція», які прямого відношення до інтеграла не мають, але смислове навантаження зберігають і знаходять широке розповсюдження в літературі і розмовній мові.

У скарбниці науки і культури є ідеї, які, виникнувши в глибокій старовині розвиваючись і удосконалюючись, пройшли черев все подальші часи і успішно служать людству зараз. До них безумовно слід віднести ідею інтеграла в математиці.

Початки інтегральних методів простежуються в працях Архімеда, що користувався ними при вирішенні багатьох геометричних завдань і доказі теорем. У книгах по історії математики відповідні розділи так і називаються - «Інтегральні методи Архімеда». І в цьому немає ніякого перебільшення, хоча відкриття інтегрального числення, час, коли вперше било вимовлено слово «інтеграл», відокремлюють від робіт Архімеда величезний часовий інтервал в 2000 років. Для переходу від методів Архімеда до алгоритму інтегрального числення, застосовного до обширного класу завдань, математика повинна була пройти довгий шлях, на якому була створена буквенна символіка, побудовано вчення про функціональні залежності, розроблений аналітичний апарат для їх виразу. На цьому шляху до робіт Архімеда зверталися двічі: на арабському середньовічному Сході і в Європі XVI-XVII ст. Але всі спроби значно просунутися вперед кінчалися невдачею. Лише створення буквеного числення Внетом і аналітичній геометрії Декартом і Ферма, а також успіхи фізичних наук Нового часу забезпечили можливість розробки аналізу нескінченно малих. Роль Архімеда в цьому процесі Лейбніц охарактеризував словами: «Уважно читаючи твори Архімеда, перестаєш дивуватися зі всіх новітніх досліджень геометрів».

Вдосконалення методів Архімеда і створення інтегрального числення, його розвиток здійснювалися в роботах Кеплера, Кавальері, Торрічеллі. Паскаля, Ферма, Валліса, Роберваля, Барроу, Ньютона, Лейбніца, братів Якоба і Іоганна Бернуллі (І. Бернуллі належить термін «інтегральне числення»; він перший прочитав, курс лекцій з інтегрального числення для маркіза Лоппіталя), Ейлера, Коші, Рімана.

І ще одна специфічна деталь. У певний період свого розвитку математика підійшла до такого рубежу, коли назріла необхідність вирішення насущних завдань, пов'язаних з фундаментальними відкриттями. Одними і тими ж завданнями займалися часто багато математиків, і встановити пріоритет, вказати, хто перший зробив те або інше відкриття, скрутно.

Тому об’єктом мого дослідження стала історія розвитку математичної науки, а предметом – історія розвитку поняття інтеграл.

Актуальність даної теми зумовлена тим, що тільки глибоке дослідження історичного розвитку теми уможливлює її найкраще осмислення, усвідомлення.

Метою роботи стало визначення основних періодів інтенсивного розвитку, визначення вчених, чий вклад у розвиток інтегрального числення приніс потужні результати, порівняння сонячної активності на творчу діяльність А.Я. Хінчіна.

Тому завданнями, відповідно стали:

1. дослідження та аналіз джерел інформації;
2. визначення вчених, які досліджували та розвивали цю сферу математики;
3. визначення основних періодів розвитку поняття інтеграл;
4. порівняння сонячної активності та творчої діяльності Хінчіна.

Ця робота може бути корисною для учнів старших класів при вивченні теми «Інтеграл», для студентів фізико-математичного факультету при вивченні курсу «Історія математики», «Історія сучасної математики», для викладачів ВНЗ.

1. **ЗАРОДЖЕННЯ ТА РОЗАИТОК ІДЕЇ**

Інтегрування простежується ще в давньому Єгипті, приблизно в 1800 році до н. е., Московський математичний папірус демонструє знання формули об'єму зрізаної піраміди.

* 1. **Метод вичерпування**

|  |
| --- |
| Евдокс Кнідський |
| D:\учеба\Філер 5 курс\images.jpeg |
| Рис. 1 |

Першим відомим методом для розрахунку інтегралів є метод вичерпання Евдокса (приблизно 370 до н. э.), який намагався знайти площі і об'єми, розриваючи їх на нескінченну безліч частин, для яких площа або об'єм вже відомі. Цей метод був підхоплений і розвинений Архімедом, і використовувався для розрахунку площ парабол і наближеного розрахунку площі круга. Аналогічні методи були розроблені незалежно в Китаї в 3-м столітті н.е. Лю Хуейем, який використовував їх для знаходження площі круга. Цей метод був згодом використаний Дзю Чонгши для знаходження об'єму кулі.

Фундаментальний внесок Евдокса в математику складає метод вичерпання, що отримав таку назву в XVII ст. і застосовувався стародавніми при доказі теорем, пов'язаних з обчисленням площ, об'ємів і інших величин. Він вважається першим варіантом теорії меж.

У основі методу лежала лема: якщо і , – дві величини, підлеглі аксіомі Евдокса—Архимеда, і якщо відняти з більше її половини, із залишку більше його половини і продовжувати так необмежено, то після деякого кінцевого числа операцій вийде залишок . Це означає, що межа рівна 0.

Пояснимо застосування методу вичерпання. Припустимо, що необхідно обчислити площу деякої фігури, тобто знайти величину А. У цю фігуру вписувалися фігури, площі яких відомі і утворюють монотонну послідовність причому повинно бути

, , …, .

Тоді через основну лему при великому різниця може бути менше будь-якої величини . Далі відшукувалася границя послідовності , тобто таке число , що різниця ставала як завгодно малою. Завершувалося знаходження А доказом того, що А = В. Якщо скористатися сучасною термінологією елементарного аналізу, то доводилося, що з рівності , слідувало А = В.

Методом вичерпання математики старовини користувалися для строгого доказу істинності результатів, отриманих різними некоректними операціями з нескінченністю, граничними переходами. Евдокс методом вичерпання довів наступні теореми: площі кругів відносяться як квадрати діаметрів; об'єм піраміди рівний 1/3 об'єму призми, що має з пірамідою ті ж основу і висоту; об'єм конуса рівний І/3 об'єму циліндра, що має з конусом ті ж основу і висоту, Евклід до них додав ще теорему про те, що об'єми куль відносяться як куби діаметрів.

Архімед удосконалив Евдокса метод вичерпання і успішно користувався їм при доказі багатьох теорем. Тут і закладені початки інтегральних методів.

За допомогою методу вичерпання Архімед знайшов, наприклад, наступні найважливіші результати: площа сегменту параболи рівна 4/3 площі вписаного в нього трикутника; об'єм кулі рівний збільшеному учетверо об'єму конуса, у якого підставою служить великий круг кулі, а висотою його радіус; площа поверхні кулі рівна збільшеній учетверо площі великого круга. Архімед застосовував метод вичерпання не тільки для встановлення нових фактів, а і обгрунтування відомих раніше, але не доведених.

Далі Архімед повідомив, що він опублікує цей метод, бажаючи здійснити колишні згадки про нього і з метою допомогти сучасним і майбутнім математикам в нових відкриттях.

У «Эфодике» Архімед при обчисленні площі параболічного сегменту розглядав його і відповідний трикутник як «суми відрізків», а об'єми — як «суми площ» Він встановив об'єми кулі і кульового сегменту, еліпсоїда обертання, параболоїда обертання, центрів тяжіння фігур і тіл; розглянув завдання про знаходження об'єму «циліндрового копита» — тіла, отриманого при перетині циліндра площиною, що проходить через діаметр основи, і «монастирського зведення» — частини простору, що висікається двома рівними циліндрами, осі яких перпендикулярні. Об'єм «циліндрового копита» Архімед знаходив за допомогою принципу важеля, після чого проводив геометричний доказ.

**1.2. Механічний метод Архімеда;**

|  |
| --- |
| Архімед |
| D:\учеба\Філер 5 курс\i.jpeg |
| Рис. 2 |

Пояснимо суть механічного методу Архімеда на прикладі як він обчислював площу параболічного сегменту. Архімед визначав площу сегменту з основою і висотою (мал. 3). Для простоти знайдемо площу, ув’язнену між дугою параболи , віссю л прямої . Це не буде значним відхиленням від міркування Архімеда. Розглянемо важіль довжини з точкою опори . На правому плечі важеля хай знаходитиметься фігура ; розіб'ємо її на вузькі смуги ширини . На малюнку така смужка розташована від початку координат на відстані х. Ордината буде , тому площа смужки приблизно рівна . Зрушимо цю смужку на кінець важеля, в точку G, і підрахуємо момент її щодо точки ; знайдемо . Зрівноважимо цю смужку смужкою площі , підвішеною до лівої частини важеля на відстані від точки О. Ординату MN отримаємо, якщо прирівняємо моменти смужок щодо крапки Це дасть: , .

Зробимо так з кожною смужкою і отримаємо на лівому плечі важеля ряд безперервно розподілених смужок по всій довжині його . Ординати їх пропорційні , тому кінці підвісків розташовуватимуться на прямій , при цьому .

Розміщені таким чином по плечу важеля смужки, складові трикутник OCD, зрівноважать зосереджену в точці G площа фігури OGB. Площа трикутника рівна ; його центр тяжіння знаходиться від вершини на відстані . Користуючись тим, що важіль знаходиться в рівновазі, прирівняємо моменти щодо точки площу трикутника і площі фігури , зосередженої в точці . Отримаємо , звідки . Оскільки ордината точки В рівна шукана площа буде .

|  |
| --- |
| Механічний метод Архімеда |
|  |
| Рис. 3 |

Отже, площа сегменту параболи складає 2/3 площі прямокутника ABGC, тобто 4/3 площі вписаного в сегмент трикутника, що і встановив Архімед.

Наведений приклад, очевидно, що не можуть залишити байдужими жодного цінителя витонченого в математиці. Але вони не містять ще початків інтегрального числення. Ці початки з'являються, коли Архімед вводить аналоги сум Дарбу.

Дуже важливим для становлення інтегрального числення було удосконалення Архімедом ідеї Демокріта про розбиття плоских фігур на елементарні полоски, що «заповнюють» фігури, і тіла на шари, що заповнюють їх. Таких елементарних частин могло бути нескінченна множина або скінченне число. Цими діями Архімед передував ідеям Кеплера і Кавальєрі у визначенні числових характеристик різних геометричних об'єктів. У Кавальєрі навіть деякі вирази співпадають з тими, які вживав Архімед: обидва говорили про всі лінії, що заповнюють плоску фігуру, і про всі плоскі перетини, що заповнюють об'єм.

Метод інтегральних сум розроблений Архімедом і застосований до обчислення площ і об'ємів в його творах «О шаре и цилиндре», «О коноидах и сфероидах», «О спиралях». У XIX книзі «О коноидах и сфероидах» він видозмінив лему Евдокса і цією формою користувався згодом: «Если дан сегмент какого-нибудь из коноидов, отсеченный перпендикулярной к оси плоскостью, или же сегмент какого-нибудь из сфероидов, не больший половины этого сфероида и точно так же отсеченный, то можно вписать в него телесную фигуру и описать около него другую, состоящую из имеющих равную высоту цилиндров, и притом так, чтобы описанная фигура была больше вписанной на величину, меньшую любой заданной телесной величины» [1, с. 195].

Отже, вперше ідею інтегрування ми знаходимо в працях Архімеда. Вона виникла з потреб практики і ніяк не була вільним творінням розуму.

1. **ВИНИКНЕННЯ ТА ОФОРМЛЕННЯ ІНТЕГРАЛУ**

Тепер ми підійшли до вирішального етапу в побудові поняття інтеграл, розвитку всієї математики і наукового природознавства, етапу, пов'язаному з іменами Ньютона і Лейбніца.

Звичайно, не слід думати, що математичний аналіз створений двома людьми - Ньютоном і Лейбніцем. Це було б спрощенням. Розвиток математичного аналізу не починався і не завершився Ньютоном і Лейбніцем.

У XVII ст. велика група математиків займалася наступними основними завданнями: проведенням дотичної до кривої, що привело до виникнення диференціального числення, і обчисленням квадратури, що спричинило виникнення інтегрального числення. Заслуга Ньютона і Лейбніца полягала у відшуканні внутрішнього зв'язку між цими завданнями, синтез яких і був основою для створення могутнього знаряддя науки і наукового природознавства. Користування теоремою про взаємну оберненість операцій диференціювання і інтегрування і знання похідних багатьох функцій дали Ньютону можливість по флюксіях отримувати флюенти (функції), тобто інтегрувати. Якщо інтеграли безпосередньо не обчислювалися, Ньютон розкладав підінтегральну функцію в степеневий ряд і інтегрував його почленно. Введення такого прийому – заслуга Ньютона. Для розкладання функцій в ряди він найчастіше користувався відкритим ним розкладанням степеня бінома, діленням чисельника на знаменник, знаходження кореня.

У «Методе флюксий» Ньютон помістив дві таблиці невизначених інтегралів; у одній з них містяться інтеграли, що алгебраїчно виражаються в кінцевому вигляді, в іншій – інтеграли, що виражаються через відомі. У «Рассуждении о квадратуре кривых» Ньютон привів «Таблицю простих кривих, порівнянних з гіперболою і еліпсом», де вказав випадки інтегралів, раціональних відносно і (або що приводяться до них при ). Умови інтегровності диференціального бінома він повідомив Лейбніцу в листі 24 жовтня 1676 року, вказавши, що виражається

алгебраїчно, коли , або або – цілі невід’ємні числа.

|  |
| --- |
| Ісак Ньютон |
| D:\учеба\Філер 5 курс\Ньютон.jpeg |
| Рис. 4 |

Спрямлення кривих Ньютон здійснював приведенням до квадратури. У «Анализе с помощью уравнений» він розглянув інтеграл , який, за його словами, «дає довжину еліпса». Це – перший випадок еліптичного інтеграла. Для обчислення його Ньютон розклав чисельник і знаменник в ряди, розділив чистильник на знаменник і проінтегрував ряд почленно. Це дало вираз еліптичного інтеграла у вигляді ряду

Ньютон широко користувався також прийомом звернення рядів, тобто отриманням з ряду для *у* по ступенях *х* ряду для *х* поступенях *у*. З цією метоювін застосовував метод невизначених коефіцієнтів і послідовних наближень. Ньютон застосовував свої методи до обчислення площ, до спрямлення кривих, кубатурам, обчисленню координат центрів тяжкості і чітко уявляв, що всі ці операції здійснюються по єдиному загальному принципу.

Необхідно відзначити, що ні у Ньютона, ні у Лейбніца не було формули:

, ,

званою зараз формулою Ньютона – Лейбніца. Але це правило вони знали. Ньютон писав: «...для отримання належного значення площі, прилеглої до деякої частини абсциси, цю площу завжди слід брати рівній різниці значень *z*, відповідних частинам абсцис, обмеженим початком і кінцем площі».

|  |
| --- |
| Готфрід Лейбніц |
| D:\учеба\Філер 5 курс\Лейбніц.jpeg |
| Рис. 5 |

Викликає інтерес розробка Лейбніцем символіки диференціального і інтегрального числень. Її можна прослідкувати по рукописах. Так, 26 жовтня 1675 року Лейбніц виражав квадратуру у дусі Паскаля словами *omn. w* (всі ординати); 29 жовтня відмітив, що зручніше писати замість *omn.* вираз (сума ліній, знак ∫ походить від першої букви слова summa), і вказав, що тут виникає новий рід числення. Інший рід числення з'являється, по словах Лейбніца, коли з виразу слідує *.* Знак ∫ збільшував число вимірювань, а *d –* зменшував (*d* – перша буква слова differentia – різниця). Вже в рукописі 11жовтня символи *x/d* і *y/d* замінені на *dx* про *dу.*

Інтеграл Лейбніц розумів як суму нескінченного числа доданків – визначений інтеграл. У одному з рукописів є запис *dx = х.* Це означає, що взаємна оберненість дій диференціювання і інтегрування у Лейбніца виступали на оперативному рівні. Лейбніц замість слова «інтеграл» вживав «сума»; термін «інтеграл» ввів І. Бернуллі.

Восени 1675 року Лейбніц сформулював основні понятті диференціального і інтегрального числення. Він дав загальні правила вирішення завдань на квадратуру і дотичні, встановив зв'язок між завданнями диференціювання і інтегрування, ввів символіку обох операцій, що збереглася понині.

Дві роботи (1701 і 1703 рр.) Лейбніц присвятив інтегруванню раціональних дробів. Для інтегрування раціонального дробу він виділяв з неї цілу частину, після чого правильний раціональний дріб представляв у вигляді суми простіших. У зв’язку з інтегруванням раціональних дробів в аналіз увійшли комплексні числа і виникла суперечка про логарифми негативних чисел.

Відкриття Ньютона і Лейбніца зробило переворот в математиці. Якщо раніше вона була доступна лише вузькому кругу фахівців, які вирішували кожне окреме завдання придуманими ними методами, то після створення алгоритму диференціального і інтегрального числення, застосовного до широкого круга завдань, математика стала інструментом в руках людей, що займаються різними дослідженнями, але що не володіють достатньо глибокими математичними знаннями.

Після знаменного часу Ньютона і Лейбніца розвиток ідеї інтеграла пішов в двох напрямах: інтеграл, що трактувався як межа деякої суми, певний інтеграл, набував досконалих і всеосяжних форм, знаходив все більше і більше застосування при вирішенні задач самої математики, в якій він склався, механіки, фізики, проник в технічні науки і став інструментом, необхідним у всіх галузях природних наук; інтеграл як сімейство первісних, невизначений інтеграл, своїм розвитком викликав виникнення абсолютно нового розділу аналізу – методів інтегрування функцій, а це у свою чергу було зв'язано з появою функцій, не відомих раніше, – клас інтегрованих функцій весь час поповнювався; найважливіше застосування невизначеного інтеграла відноситься до інтегрування диференціальних рівнянь, складових могутнього апарату багатьох наук.

1. **ІНТЕГРАЛИ КОШІ І РІМАН**

Творчість Коші і Романа протікало тоді, коли в суспільному житті, природознавстві і математиці відбулися істотні зміни. Зросла роль математики в системі наук. У зв'язку з тим, що вона набула аналітичного характеру, математичні методи проникали не тільки в механіку, з якою математика була в тісному контакті ще в часи Архімеда, але і фізику, техніку і економіку. Аналіз став провідною галуззю знань. Розширилася мережа учбових закладів, що готують фахівців, стало більше університетів, вищих технічних шкіл; професори університетів почали займатися науковими дослідженнями, академіки – викладати в університетах. Збільшилася кількість періодичних наукових виданнь, що надало ширшу можливість публікації робіт, поліпшило інформативність.

Проте знов виникли потреби як усередині математики, так а вінших науках, а також пов'язані з обчисленням деяких первісних труднощів принципового характеру висували на перший план визначений інтеграл. Завдання теорії ймовірності, теорії рядів, інтегрування диференціальних рівнянь, математичної фізики, теорії кінцевих різниць приводили до спеціального вигляду визначених інтегралів, зокрема невласним. Прикладом таких інтегралів служить інтеграл Пуассона .Обчисленням таких інтегралів займалися багато видатних математиків. У Ейлера цим питанням відводяться цілі два томи. Дослідженню спеціальних інтегралів присвятили свої праці Лагранж, Лаплас, Пуассон, Коші.

Але це не все. Обчислення деяких інтегралів по формулі Ньютона – Лейбніца , якою практично користувалися математики, таїло в собі іноді парадокси. Першим звернув на це увагу Д'Аламбер в 1768 році – помітив, що формулою Ньютона–Лейбніца не можна користуватися при обчисленні інтегралів вигляду , коли підінтегральна функція на проміжку інтегрування перетворюється в нескінченність.

Питання існування інтегралів в творчості Коші вперше обговорювалися в його мемуарі 1814 р., в якому були відмічені парадоксальні властивості деяких подвійних інтегралів. Наприклад:

.

|  |
| --- |
| Огюстен Луї Коші |
| D:\учеба\Філер 5 курс\Коші.jpeg |
| Рис. 6 |

Коші почав розглядати подвійні інтеграли як суми елементів, відповідних різним значенням двох змінних. Парадоксальні властивості, виявлені у подвійних інтегралів, Коші переніс і на визначені інтеграли. Наприклад .

Таким чином, розвиток математики висував необхідність перегляду концепції інтеграла, і це було виконано Коші.

Коші будував визначений інтеграл так. Для неперервної на відрізку функції він складав суму

,

розбиваючи відрізок на частини точками . Потім довів, що незалежно від способу розбиття відрізка за умов, що збільшується необмежено і всі різниці прямують до нуля, «значение станет в конце концов чувствительно постоянным или, другими словами, в конце концов достигнет известного предела, который будет зависеть только от функции и крайних значений , , приписанных переменной *х*. Этот предел и есть то, что называют определенным интегралом».

Виходячи із визначення інтеграла і неперервності функцій Коші довів наступні властивості визначених інтегралів:

1) ,

2) ,

3) ,

4) , ,

5) ,

6) , ,

7) коли функція зберігає знак на , буде , .

Невизначений інтеграл Коші ввів як частинний випадок визначеного, при змінній верхній межі. Він довів неперервність такого інтеграла по верхній межі і теорему про те, що похідна його по верхній межі рівна підінтегральній функції. Коші довів також справедливість формули Ньютона - Лейбніца. Він висловив положення, пов'язані з диференціюванням і інтегруванням по параметру.

Здається, зовсім мало часу пройшло після введення Коші визначеного інтеграла, але знову виникають мотиви, що вимушують переглядати, уточнювати це поняття, і знову наполегливо працює розум математиків. І поставити останню крапку про «пригоди» ідеї інтеграла випало Ріману. Тільки не слід думати, що розвиток поняття інтеграла закінчився з роботами Рімана. Його творчістю завершився шлях до інтеграла і почався шлях інтеграла, не менш цікавий і істотний для науки.

Як видно з попереднього, різні причини спонукали математиків займатися інтегралом. Для Рімана таким джерелом були тригонометричні ряди: визначений інтеграл з'явився у нього при рішенні задачі про розкладання довільної функції в тригонометричний ряд. Отже, ось перше питання: що потрібно розуміти під знаком ?

Побудова інтеграла Рімана така. Розглянемо функцію на проміжку . Розіб'ємо проміжок довільним чином точками на частини. Позначимо найбільшу з різниць через . На

|  |
| --- |
| Бернгард Ріман |
| D:\учеба\Філер 5 курс\Ріман.jpeg |
| Рис. 7 |

кожному з часткових проміжків виберемо довільно точки і обчислимо значення функції у цих точках. Складемо тепер суму . Її називають рімановою, частіше інтегральною.

Кінцева межа інтегральної суми при називається визначеним інтегралом від на проміжку і позначається . Коли така межа існує, функція називається інтегрованою на . Ріман встановив необхідний і достатній критерій інтегрованості функції.

1. **ПОДАЛЬШИЙ РОЗВИТОК ІНТЕГРАЛУ**

Дослідження інтеграла після Рімана не припинилися, а пішли прискореним темпом. Якби перерахувати лише математиків, що зробили значний внесок в теорію інтеграла в другій половині XIX і в XX ст., то це зайняло б багато місця. І книга, присвячена шляху інтеграла від Рімана, скажімо, до середини XX ст., вийшла б значною. Інтеграл був, є і буде стрижньовим поняттям в математиці. Не випадково символом Міжнародного математичного конгресу, який проходив в Москві в 1966 р., був знак інтеграла.

Для подальших узагальнень інтеграла усередині самої математики повинні були дозріти умови, що допускають це. Такі умови створила розроблена в кінці XIX ст. і початку XX ст. теорія множин, з найважливішим поняттям міри множини. Виникло нове поняття – інтеграл Лебега, узагальнений інтеграл Рімана. Лебег ввів дескриптивне визначення інтеграла: сформулював його властивості, що не містять вказівок на побудову. Він дав також конструктивне визначення інтеграла – аналітичне і геометричне.

Роботи Лебега послужили значним імпульсом для подальших досліджень в математиці. Теорія міри і інтеграл Лебега служать теоретичним інструментом в сучасній теорії диференціальних рівнянь, теоретичній в математичній фізиці, теорії узагальнених функцій, теорії лінійних операторів і спектральної теорії, теорії вірогідності, теорії випадкових процесів і інших розділах математики.

Майже одночасно з Лебегом при рішенні задачі про розподіл маси на інтервалі узагальнення інтеграла Рімана здійснив Т. Стілтьєс. Введення інтеграла Стілтьєса (1856-1894) також привело до нових робіт, присвяченим його властивостям, різним застосуванням, з'ясуванню зв'язку інтеграла Стілтьєса з інтегралами Рімана і Лебега.

У 1912 році з'явилося узагальнення інтеграла Лебега – інтеграл А. Данжуа (1884-1973), що викликав новий потік досліджень. У 1930 р. А.І. Колмогоров (р. 1903) опублікував роботу, в якій охоплені всі інтеграли як межі різні інтегральні сум. Інтеграл Колмогорова знайшов застосування в математичній фізиці, при математичному обґрунтуванні квантової механіки.

У розвиток поняття інтеграла, окрім Колмогорова, внесли великийвнесок і інші російські математики. Вони зробили першочергової важливості відкриття. Це П.Л. Чебишов, А.А. Марков (1856-1922), А.М. Ляпунов, II.Н. Лузін (1883-1950), А.Я. Хінчін (1894-1959). У теорії функцій А.Я. Хінчін одночасно з Данжуа створив теорію апроксимативних похідних і узагальнив поняття інтеграла.

Свої дослідження по асимптотичних похідних Хінчін використовував (1916 р.) для узагальнення інтеграла Данжуа. Він знайшов необхідну і достатню умови для того, щоб інтеграл Данжуа був первісною функцією, а також зняв обмеження, накладене Данжуа на застосування свого інтегрального процесу, і в результаті отримав інтеграл, що дозволяє відновлювати елементарну функцію по її асимптотичній похідній. Трохи згодом сам Данжуа опублікував таке ж узагальнення, але пріоритет належить Хінчину, хоча в світовій літературі цей інтеграл носить ім'я Данжуа – Хінчина [2, с. 442].

Табл. 1

**ХРОНОЛОГІЯ РОЗВИТКУ ПОНЯТТЯ ІНТЕГРАЛ**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Дата | Подія | Автор | Місце |
| 408 рік до н. е. | Метод вичерпування для обчислення площ | Евдокс | Кнід |
| 287 рік до н. е. | Механічний метод розрахунку об’ємів та площ | Архімед | Сіракузи |
| 1689 рік | Внутрішній зв’язок між диференціюванням та інтегруванням | Ньютон | Вулсторп |
| 1702 рік | Сформував основні поняття інтегрального числення, ввів сучасний символ інтегралу | Лейбніц | Лейпциг |
| 1830 рік | Побудова визначеного інтегралу, введення невизначеного інтегралу як частинного випадку визначеного, деякі властивості визначеного інтегралу | Коші | Турин, Прага |
| 1857 рік | Побудова інтегралу Рімана | Ріман | Німеччина |
| 1934 рік | Дескриптивне визначення інтеграла | Лебег | Франція |
| 1894 рік | Узагальнений визначений інтеграл | Стілтьєс | Тулуза |
| 1932 рік | Отримання інтегралу, що дозволяє відновлювати елементарну функцію по її асимптотичній похідній | Данжуа | Франція |
| 1934 рік | Хінчін | Москва |

**ВИСНОВКИ**

1. Розглянуто основні етапи розвитку поняття інтеграл та визначені вирішальні умови його виникнення та розвитку;
2. Детально описані найперші способи інтегрального числення: метод Евдокса та механічний метод Архімеда;
3. З’ясовано походження символу інтеграла, його перше вживання в літературі;
4. Описано основні ідеї та здобутки вчених в області інтегрального числення, що стали вирішальними та значущими для подальших досліджень;
5. Порівняно показники сонячної активності та творчої діяльності А.Я. Хінчіна та побудовано графік їх залежності;
6. Робота може бути корисною для учнів старших класів при вивченні теми «Інтеграл», для студентів фізико-математичного факультету при вивченні курсу «Історія математики», «Історія сучасної математики», для викладачів ВНЗ.

**ЛІТЕРАТУРА**

1. Архимед. Сочинения // Нор., ст. и коммент. И. Н. Веселевского. – М.: Физматгиз, 1962, – с.213.
2. История отечественной математики. Киев: Наукова думка, 1967. Т. 2, с. 616.
3. В. А. Никифоровский, Путь к интегралу. — М.: "Наука", 1985. — 192 с.
4. <http://ru.wikipedia.org/wiki/Интеграл>

**ДОДАТКИ**

**Д. 1. ВПЛИВ СОНЯЧНОЇ АКТИВНОСТІ НА ТВОРЧІСТЬ ОЛЕКСАНДРА ЯКОВИЧА ХІНЧИНА**

Табл. 2

**ПУБЛІКАЦІЇ А.Я.ХІНЧІНА**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Рік | Видання | Кількість сторінок | Числа Вольфа |
| 1918 | 1. О процессе интегрирования Denjou. Матем. сб., №30 (1918), С. 548—557. | 9 | 81 |
| 1921 | 1. Sur la thеorie de l'intеgrale de M. Denjou. Иваново, Изв. Политехи, ин-та, №3 (1921), С. 49—51. | 2 | 26 |
| 1922 | 1. Об одном свойстве непрерывных дробей и его арифметических приложениях. Иваново, Изв. Политехи, ин-та, №5 (1922), С. 27—41. 2. К вопросу о представлении числа в виде суммы двух простых чисел. Иваново, Изв. Политехи, ин-та, №5 (1922), С. 42—48. 3. Новое доказательство основной теоремы метрической теории множеств. Иваново, Изв. Политехи, ин-та, №6 (1922), С. 39—41. | 22 | 14 |
| 1923 | 1. Sur les suites de fonctions analytiques bornеes dans leur ensemble. Fund, math., №4 (1923), С. 72—75.  2. Das Stetigkeitsaxiom des Linearcontinuums als Inductionsprincip betrachtet. Fund, math., №4 (1923), С. 164—166.  3. lieber dyadische Brüche. Math. Z., №18 (1923), С. 109 -116.  4. Ein Satz über Kettenbrüche mit arithmetischen Anwendungen. Math. Z., 18 (1923), С. 289—306. | 29 | 6 |
| 1924 | 1. О последовательностях аналитических функций. Матем. сб., №31 (1924), С. 147—151. 2. Исследования о строении измеримых функций. Матем. сб., №31 (1924), С. 265—285. 3. Исследования о строении измеримых функций. Матем. сб., №31 (1924), С. 377—433. 4. Einige Sätze über Kettenbrüche mit Anwendung auf die Theorie der Diophantischen Approximationen. Math Ann., №92 (1924), С. 115—125. 5. Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Fund, math., №6 (1924), С. 9—20. 6. Sur un thеorиme gеnеral relatif aux probabilitеs dеnombrables G. r. Acad. sei., №178 (1924), С. 617—618. | 102 | 17 |
| 1925 | 1. Über die angenäherte Auflösung linearer Gleichungen in ganzen Zahlen., Матем. сб., №32 (1925), С. 203—219. 2. Zur Theorie der diophantischen Approximationen. Матем. сб., №32 (1925), С. 277—278. 3. Bemerkung zur metrischen Theorie der Kettenbrüche. Матем. сб., №32 (1925), С. 326—329. 4. О петербургской игре. Матем. сб., №32 (1925), С. 330—341. 5. Über Konvergenz von Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden.Матем. сб., №32 (1925), С. 668—677 (совм. с Колмогоровым А. II.). 6. Über die Anwendbarkeitsgrenzen des Tchebycheffschen Satzes in der Wahrschein­lichkeitsrechnung. Матем. сб., №32 (1925), С. 678—688. 7. Об одном вопросе теории диофантовых приближений. Иваново, Изв. Политехи. ин-та, 8:2 (1925), С. 32—37. 8. Zwei Bemerkungen zu einer Arbeit des Herrn Perron. Math. Z., №22 (1925), С. 274—284. 9. Bemerkung zu meiner Abhandlung «Ein Satz über Kettenbrüche mit arithmetischen Anwendungen», Math. Z., №22 (1925), С. 316. | 81 | 44 |
| 1926 | 1. Ober eine Klasse linearer diophantischen Approximationen, Rend. Cire. mat. Palermo, №50 (1926), С. 170—195. 2. Zur metrischen Theorie der diophantischer Approximationen. Math. Z., №24 (1926), С. 706—714. 3. Идеи интуиционизма и борьба за предмет в современной математике. М., Вестник Комм, акад., №16 (1926), С. 184—192. | 41 | 64 |
| 1927 | 1. Über das Gesetz der grossen Zahlen. Math. Ann., №96 (1927), С. 152—168. 2. Recherches sur la structure des fonctions mesurables. Fund, math., №9 (1927), С. 212. 3. Основные законы теории вероятностей. – M.: Изв. асс. ип-тов ун-та, 1927. ­ 91 с. 4. Диофантовые приближения. Труды Всероссийского матем. съезда, М. (1927), 131—137. 5. Ober Diophantische Approximationen höheren Grades. Матем. сб., №34 (1927), С. 109—112. | 117 | 69 |
| 1928 | 1. Теория чисел. Очерк развития за время 1917—1927 гг. Матем. сб., №35 (1928), доп. вып., 1—4. 2. Über die Stabilität zweidimensionaler Verteilungsgesetze. Матем. сб., №35 (1928), С. 19—23. 3. Über die angenäherte Auflösung linearer Gleichungen in ganzen Zahlen. Матем. сб., №35 (1928), С. 31-33. 4. Begründung der Normalkorrelation nach der Lindebergschen Methode. M., Изв. асс. ип-тов ун-та, №1—2 (1928), С. 37—45. 5. Objection а une note de M. M. Barzin et Errera. Bull. Acad. sei. de Belgique (5), №14 (1928). С. 223- 224. 6. Sur la loi forte des grands nombres. Cr. Acad. sei., №186 (1928), С. 285—287. 7. Усиленный закон больших чисел и его значение для математической статистики. Вестник стат., №29 (1928), С. 123—128. 8. Über ein Problem der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Z., №29 (1928— 1929), С. 746—751. | 35 | 78 |
| 1929 | 1. Учение Мизеса о вероятностях и принципы физической статистики. УФН, №9 (1929), С. 141—166. 2. Leber die positiven und negativen Abweichungen des arithmetischen Mittels. Math. Ann., №101 (1929), С. 381—385. 3. Über einen neuen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Ann., №101 (1929), С. 745—752. 4. Über Anwendungskriterien für das Gesetz der grossen Zahlen. Матем. сб., №36 (1929), С. 78—80. 5. Sur la loi des grands nombres. G.r. Acad. sei., №188 (1929), С. 477—479. 6. Sur une gйnйralisation de quelques formules classiques. G. r. Acad. sei., №188 (1929), С. 532—534. 7. Роль и характер индукции в математике. Сб. работ матем. раздела Комм, акад., №1 (1929), С. 5—7. | 38 | 65 |
| 1930 | 1. Die Maxwell—Boltzmannsche Energieverteilung als Grenzwertsatz der Wahrschein-lichkeitsrechnung. Труды семин. по теории вероятн. и статист., №1 (1930), С. 1—11. | 11 | 36 |
| 1932 | 1. Zur Birckhoffs Lцsung des Ergodenproblems. Math. Ann., №107 (1932), С. 485—488. 2. Великая теорема Ферма. M.—Л. (1932), С. 1—52. 3. Zur additiven Zahlentheorie. Матем. сб., №39 (1932), С. 27—34. 4. Über eine Ungleichung. Матем. сб., №39 (1932), С. 35—39. 5. Основные законы теории вероятностей. M.—Л. (1932), С. 1—82. 6. Sur les classes d'йvйnements йquivalents. Матем. сб., №39 (1932), С. 40—43. 7. Remarques sur les suites d'йvйnements obйissant а la loi des grands nombres. Матем. сб., №39 (1932), С. 115 - 119. 8. Математическая теория стационарной очереди. Матем. сб., №39 : 4 (1932), С. 73—84. 9. Теория вероятностей. В кн. «Математика в СССР за 15 лет». М.—Л. (1932), С. 165. | 166 | 11 |
| 1933 | 1. Sulla successioni stationäre di eventi. Giorn. di Att., №4 (1933), С. 3. 2. Zur mathematischen .Begrьndung der statistischen Mechanik. ZAMM, №13 (1933), С. 101—103. 3. С) среднем времени простоя станков. Матем. сб., №40 (1933), С. 119—123. 4. Leber stationдre Reihen zufдlliger Variablen. Матем. сб., №40 (1933), С. 124—128. 5. Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung Б. (1933) (русский перевод). 6. Детерминанты Грама для стационарных рядов. М., Учен. зап. ун-та, №1 (1933), С. 3—5 (совм. с Гельфондом А. О.). 7. The method of spectrale reduction in classical dynamics. Proc. of Math. Acad. Waschingt. №19 (1933), С. 567—578. 8. Ober ein metrisches Problem der additiven Zahlentheorie. Матем. сб., №40 (1933), С. 180—189. | 36 | 6 |
| 1934 | 1. Теория вероятностей в дореволюционной России и Советском Союзе. Фронт науки и техники, №7 (1934), С. 36—46. 2. Eine arithmetische Eigenschaft der summierbaren Funktionen. Матем. сб., №41 (1934), С. 11—13. 3. Fourierkoeffizienten längs einer Bahn im Phasenraum. Матем. сб., №41. (1934), С. 14—16. 4. Eine Verschärfung des Poincareschen «Wiederkehrsatzes». Comp. math., №1 (1934), С. 177—179. 5. Zur mathematischen Begründung der Maxwell—Boltzmannschen Energieverteilung. M., Учен. зап. ун-та, №2 :2 (1934), С. 35—38. 6. Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse. Math. Ann., №109 (1934), С. 604—615 (русский перевод). | 32 | 9 |
| 1935 | 1. Цепные дроби. М.—Л. (1935). 2. Metrische Kettenbruchprobleme. Comp. math., №1 (1935), С. 361—382. 3. Neuer Beweis und Verallgemeinerung eines Hurwitzschen Satzes. Math. Ann., №111 (1935), С. 631—637. | 27 | 36 |
| 1936 | 1. Метрические задачи теории иррациональных чисел. УМН. №1 (1936), С. 7—32. 2. Zur metrischen Kettenbruchtheorie. Comp. math., №3 (1936), С. 276—285. 3. Sul Domini di Attritionen della lege di Gauss. Giorn., di Att., №7 (1936), С. 3—18. 4. Асимптотические законы теории вероятностей. М.—Л. (1936), С. 1—196 (перевод). 5. Su una legge dei grand numeri generalizzata. Giorn. di Att., №7 (1936), С. 365—377. | 258 | 80 |
| 1937 | 1. Über Klassenkonvergenz von Verteilungsgesetzen. Томск, Изв. НИИ матем. и мех. ун-та, №1 (1937), С. 261—265. 2. Новый вывод одной формулы П. Леви. М., Бюлл. ун-та (А), №1 : 1 (1937), С. 1—5. 3. Об арифметике законов распределения. М., Бюлл. ун-та (А), №1 : 1 (1937), С. 6—17. 4. Об одном признаке для характеристических функций. М., Бюлл. ун-та (А), №1 : 5 (1937), С. 1—3. 5. Инвариантные классы законов распределения. М., Бюлл., ун-та (А), №1 : 5 (1937), С. 4—5. 6. Примеры случайных величин, подчиняющихся устойчивым законам распределения. М., Бюлл. ун-та (А), №1 : 5 (1937), С. 6—9. 7. Zur Theorie der unbeschrдnktteilbaren Verteilungsgesetze. Матем. сб., №2 (44) (1937), С. 79—120. 8. Surr les Logis stabiles. Cr. Acad. sei., №202 (1937), С. 374—376 (совм. с Леви П.). 9. Теория вероятности в дореволюционной России и в Советском Союзе. Фронт науки и техники, №7 (1937), С. 36—46. 10. Ober Singulare Zahlensysteme. Comp. math., №4 (1937), С. 424—431. 11. Ein Satz über lineare diophantische Approximationen. Math. Ann., №113 (1937), С. 398—415. | 125 | 114 |
| 1938 | 1. Предельные законы для сумм независимых случайных величин. М.—Л. (1938), С. 1—116. 2. Теория затухающих спонтанных эффектов. ИАН, сер. матем. (1938), С. 313—322. 3. Две теоремы о стохастических процессах с однотипными приращениями. Матем. сб., №3 (45) (1938), С. 577—584. 4. Zur Methode der willkürlichen Funktionen. Матем. сб., №3 (45) (1938), С. 585—590. 5. Об унимодальных распределениях. Томск, Изв. НИИ матем. и мех. ун-та, №2 : 2 (1938), С. 1—7. 6. Теория корреляции стационарных стохастических процессов. УМН, №5 (1938), С. 42—51 (перевод). | 153 | 110 |
| 1939 | 1. О локальном росте однородных стохастических процессов без последействия. ИАН, сер. матем. (1939), С. 487—508. 2. О сложении последовательностей натуральных чисел. Матем. сб., №6 (48) (1939), С. 161—166. | 26 | 89 |
| 1940 | 1. О сложении последовательностей натуральных чисел. УМЫ, №7 (1940), С. 57 - 101. | 44 | 68 |
| 1941 | 1. Об аналитических методах статистической механики. ДАН, №33 (1941), С. 438- 441. 2. Средние значения сумматорных функций в статистической механике. ДАН, №33 (1941), С. 442—445. 3. О межмолекулярной корреляции. ДАН, №33 (1941), С. 487—490. | 9 | 48 |
| 1942 | 1. Дисперсия и законы распределения сумматорных функций в статистической механике. ДАН, 34 (1942), 61—62. | 2 | 31 |
| 1943 | 1. Математические основания статистической механики. М.—Л. (1943), С. 1- 126. 2. Конвексные функции и эволюционные теоремы статистической механики. ПАН. сер. матем., №7 (1943), С. 111—112. 3. Об эргодической проблеме квантовой механики. И АН, сер. матем., №7 (1943), С. 167—184. 4. Sur un cas de corrйlation а posteriori. Матем. сб., №12 (54) (1943), С. 185—196. | 155 | 16 |
| 1946 | 1. О задаче Чебышева. УМН, №1:3—4 (13-14) (1946), С. 198—199. 2. О задаче Чебышева. ИАН, сер. матем., №10 (1946), С. 281—294. | 15 | 93 |
| 1947 | 1. Об одном предельном случае аппроксимационной теоремы Кронекера. ДАН, №56 (1947), С. 563—565. 2. Об одной общей теореме теории линейных диофантовых приближений. ДАН, №56 (1947), С. 679—681. 3. Две теоремы, связанные с задачей Чебышева. ИАН, №11 (1947), С. 105—110. 4. О задаче Чебышева. УМН, №2 : 1 (17) (1947), С. 222. | 11 | 152 |
| 1948 | 1. Восемь лекций по математическому анализу. Изд. 3. М.—Л. (1948), С. 1—260. 2. Обобщенная задача Чебышева. УМН, №3:1 (23) (1948), С. 210. 3. Принцип Дирихле в теории диофантовых приближений. УМН, №3 : 3 (25) (1948), С. 3—28. 4. Количествеппая концепция аппроксимационной теории Кронекера. УМН, №3 :3 (25) (1948), С. 152. 5. О некоторых приложениях метода добавочной переменной. УМН, №3 : 6 (28) (1948), С. 188- 200. 6. Количественная концепция аппроксимационной теории Кронекера. ИАН, сер. матем., №12 (1948), 113—122. 7. Регулярные системы линейных уравнений и общая задача Чебышева. ИАН, сер. матем., №12 (1948), С. 249—258. 8. Теорема переноса для сингулярных систем линейных уравнений. ДАН, №59 (1948), С. 217—218. 9. Три жемчужины теории чисел. Изд. 2, М.—Л. (1948), С. 1—64. 10. К теории линейных диофантовых приближений. ДАН, №59 (1948), С. 865—867. | 360 | 136 |
| 1949 | 1. Цепные дроби. Изд. 2, М.—Л. (1949), С. 1—116. 2. О дробных частях линейной формы. ИАН, сер. матем., №13 (1949), С. 3—8. 3. О дробных частях линейной формы. УМН, №4 : 1 (29) (1949), С. 182. 4. Простейший линейный континуум. УМН, С. 4 :2 (30) (1949), С. 180—197. 5. Об аналитическом аппарате физической статистики. УМН, №4 : 6 (34) (1949), С. 189. | 140 | 135 |
| 1950 | 1. Об аналитическом аппарате физической статистики. Труды Матем. ин-та АН, №33 (1950), С. 1—56. 2. Предельные теоремы для сумм положительных случайных величин. УМЖ, №4 (1950), С. 3—17. 3. Статистическая механика как задача теории вероятностей. УМН, №5 :3 (37) (1950), С. 3—46. 4. Предельные теоремы для сумм положительных случайных величин. УМН, №5 : 5 (39) (1950), С. 145. 5. О суммах положительных случайных величин. ДАН, №71 (1950), С. 1037—1039. | 116 | 84 |
| 1951 | 1. Математические основания квантовой статистики. М.—Л. (1951), С. 1—256. 2. Элементы теории чисел. В кн. «Энциклопедия элементарной математики», кн. 1. Арифметика. М.—Л. (1951), С. 255—353. 3. О некоторых общих теоремах статистической физики. Труды Матем. ин-та АН, №38 (1951), С. 345—365. 4. О законах распределения «чисел заполнения» в квантовой статистике. ДАН, №78 (1951), С. 461—463. | 376 | 69 |
| 1952 | 1. О классах эквивалентных событий. ДАН, №85 (1952), С. 713—714. 2. Советская школа теории вероятностей. Китайский матем. журнал (1952), С. 1- 7. 3. Метод произвольных функций и борьба против идеализма в теории вероятностей. Сб. «Философские вопросы совремеипой физики», М. (1952), С. 522—538. | 24 | 32 |
| 1593 | 1. Понятие энтропии в теории вероятностей. УМН, №8 :3 (55) (1953), С. 3—20. 2. Симметрические функции на многомерных сферах. УМН, №8 : 3 (55) (1953). С. 156. | 18 | 14 |
| 1955 | 1. Математические методы теории массового обслуживания. Труды Матем. ин-та АН, 49 (1955), С. 1-123. 2. Симметрические функции на многомерных поверхностях. В сб. «Памяти А. А. Андронова». М. (1955), С. 541-574. | 156 | 38 |
| 1956 | 1. Потоки случайных событий без последействия. Теория вероятн. и ее примен., №1 (1956), С. 3—18. 2. О нуассоновских потоках случайных событий. Теория вероятн. и ее примен., №1 (1956), С. 320—327. 3. Об основных теоремах теории информации. УМН, 11 : №1 (67) (1956), С. 17—75. | 80 | 141 |
| 1957 | 1. Краткий курс математического анализа. Изд. З, М. (1957), С. 1- 628. 2. Элементарное введение в теорию вероятностей. Изд. 4, Л1. (1957), С. 1—144 (совм. с Гнеденко Б.В.). | 772 | 190 |

Рис. 8