Розвиток математичної думки. Історична довідка

Джерело: Конфорович А.Г. Визначні математичні задачі,
Київ «Радянська школа», 1981.
Комп'ютерна верстка: Виспянський Ігор (email: virua@ukr.net).
Дата публікації: 15 березня 2009 року.

Єгипет

Найдавніші математичні тексти дійшли від цивілізацій Стародавнього Сходу — Єгипту й Вавилону. У цих країнах не було великих земельних площ і господарська діяльність вимагала проведення значних іригаційних робіт, землевпорядкування, зокрема межування ділянок після повеней, які приносили річковий намул, що руйнував межі земельних наділів. Зміцнення централізованих держав сприяло створенню міст, розвитку торгівлі. Математичні задачі виникали у зв'язку з необхідністю виконувати розрахунки для будівельних робіт, під час розподілу майна, обміну й розподілу продуктів, вимірювання площ полів, об'ємів гребель і зерносховищ, організації великих караванів та ін.

Основними пам'ятками єгипетської математики є **папіруси Райнда** і **Московський**. Перший, названий іменем англійського єгиптолога, який його знайшов, зберігається в Британському музеї в Лондоні і частково в Нью-Йорку. Останнім часом цей папірус частіше називають **папірусом Ахмеса**. Так звали писця, який записав його біля 1800—1600 рр. до н. е., коли Єгипет був завойований гіксосами. Цей сувій (5,25 х 0,33 м) містить 84 задачі.

У другому папірусі (5,44 х 0,08 м) 25 задач. Він також був переписаний в епоху гіксосів з тексту, який відносився приблизно до 1900 р. до н. е. Цей папірус зберігається в Московському музеї образотворчого мистецтва ім. О. С. Пушкіна.

Обидва папіруси були навчальними посібниками для школи писців. Там готували чиновників, зодчих, землемірів, або гарпедонавтів (буквально — натягувач мотузки), тобто носіїв наукових знань тієї епохи. **Математичні знання вже в той період цінувалися надзвичайно високо.** У папірусі Ахмеса сказано, що він присвячений «досконалому й ґрунтовному дослідженню всіх речей, розумінню їхньої суті, пізнанню всіх таємниць».

Нумерація стародавніх єгиптян була десятковою, але непозиційною. Цифри від 1 до 9 позначалися паличками, були окремі знаки для чисел виду 10^n (від 10 до 10^7). З дробів знали тільки так звані аліквотні (виду $\frac{1}{n}$), існували вже окремі ієрогліфи для звичайних дробів

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}.$$

Дії першого ступеня не становили труднощів. Множення і ділення зводилося до подвоєння і додавання. До процедури подвоєння приводило й ділення.

Дії другого ступеня ще громіздкі, не зовсім алгоритмічні, але вже зроблено перший крок до відокремлення операції множення від додавання.

Задачі на обчислення «аха» (купа, кількість речей, яку потрібно визначити) зводилися до рівнянь першого степеня: $ax + bx + cx + \cdots + nx = p$.

Задачі на обчислення «аха» — перші в історії математики абстрактні задачі, які розв'язували єдиним методом. Ряд задач зводився до обчислення суми членів арифметичної і геометричної прогресій. Серед них знаменита своєю історією задача-мандрівниця, яка в різних модифікаціях зустрічається в різні епохи в багатьох народів.

Геометричні задачі виникали з практики будівництва, землевпорядкування і землеробства. Термінів «трикутник», «чотирикутник», «фігура», «сторона фігури» тощо ще не було. Скрізь йдеться про пряме, косе чи кругле поле, ділянку з межею, шириною і довжиною. Площі прямокутників, трикутників і трапецій обчислювали за точними правилами, площу довільного чотирикутника — наближено, як добуток півсум його протилежних сторін a, c і b, d:

$$S = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}.$$

Ученим того часу вдалося дістати і ряд визначних результатів. Насамперед, це обчислення за точною формулою

$$v = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

об'єму правильної чотирикутної зрізаної піраміди (задача № 14 Московського папірусу); великою була точність обчислення площі круга. Хоча не вдалося точно перекласти текст і розв' задачі № 10 з Московського папірусу, в якій обчислюється об'єм кошика, що має форму половини кулі «з отвором $4\frac{1}{2}$», одні вважають, що в задачі йдеться про точне обчислення поверхні півкулі, другі — бічної поверхні циліндра, треті — наближене обчислення об'єму куполоподібного зерносховища. В усіх випадках — це теж визначне досягнення.

В розв'язуванні геометричних задач було вже здобуто значних успіхів, проте в окрему галузь математики геометрія ще не виділилася.

Класифікувалися задачі не за способами їх розв’язування, а за темами. Розв’язання подавались без будь-яких пояснень, інколи — лише з перевіркою знайденого результату. Проте пошук розв’язань задач був пов’язаний з інтенсивною творчою роботою абстрагуючої думки. Учені узагальнювали здобуті результати, шукали досконаліші обчислювальні й операторні алгоритми, формували математичні поняття. Звичайно, траплялися й помилки. Першим важко не помилитися! Йдучи невторованими шляхами, математик далекого минулого працював не менш інтенсивно, ніж його далекий нащадок по професії — наш сучасник, штурмуючи проблеми новітньої математики. Оцінюючи успіхи першопрохідців, слід пам’ятати, що тривіальний для нас результат 2х2 = 4 колись було справжнім тріумфом абстрактного мислення.

Вавилон

Вавилонською називається культура стародавнього Дворіччя, утвореного річками Тигром і Євфратом. Основу вавилонської культури заклали шумери. Вони винайшли клинописне письмо, користувалися шістдесятковою системою числення. Джерелами вивчення шумеро-вавилонської математики є клинописні таблички. З понад 500 000 табличок, які вдалося знайти, 150 містять тексти і розв’язання задач, 200 — числові таблиці. На кожній табличці від 18 до 100 задач, на одній з них записано умови 148 задач.

Більша частина математичних текстів — це посібники для учнів шкіл писців або вправи, які виконували писці й придворні чиновники. Вони написані приблизно в 1800—1600 рр. до н. е., коли у Вавилоні правила династія Хаммурапі, інші таблички написані протягом трьох останніх століть до нашої ери (епохи Селевкідів). Майже всі математичні тексти написані мовою аккадян, оскільки шумери як народ вже в XXI і XX ст. до н. е. під натиском завойовників назавжди зникли з політичної історії.

Видатним досягненням вавилонської математики було **створення першої в історії позиційної шістдесяткової системи числення**. Вона ґрунтувалася на використанні двох знаків: вертикальний клин означав 1, горизонтальний — 10. У цій системі числа 1, 2, ..., 58, 59 були одиницями першого розряду, 60 одиниць першого розряду становили одиницю другого розряду, 60 одиниць другого розряду — одиницю третього розряду і т. д.

Як бачимо, у межах одного розряду, наприклад від 1 до 59, лічба йшла за десятковою непозиційною системою, але при переході до кожного вищого розряду — за шістдесятковою позиційною.

У V ст. до н. е. в зв’язку з потребами астрономічних обчислень **з’являється особливий знак, який виконує роль нуля.** Його використовували, коли всередині числа не було одиниць якогось розряду. Раніше відсутність таких одиниць позначали інтервалами між клинописними знаками. Цікаво, що свій нуль вавилоняни використовували лише всередині числа й ніколи не писали його, коли в числі не було одиниць першого або першого й другого розрядів.

Вавилонська шістдесяткова система числення була ще непослідовною позиційною. І все-таки це був величезний крок уперед. Ми і тепер вимірюємо час і кути за шістдесятковою системою, винайденою шумерами понад п’ять тисячоліть тому.

Велика основа системи числення (60) позначилася на характері вавилонської обчислювальної математики. Таблиця множення в ній містила 59 х 59 = 1711 добутків. Їх не можливо було запам’ятати і тому під час розв’язування задач широко використовувалися математичні таблиці, які містили квадрати чисел (n^2), куби (n^3), квадратні й кубічні корені з чисел, таблиці множення (m X n), для обчислень сум виду $n^2 + m^2$ тощо.

Дії додавання й віднімання записувалися словами. Для множення використовувався термін «з’їсти». Можливо це зумовлено тим, що в результаті множення довжини на ширину площа ніби з’їдала, розчиняла в собі множники. Складною операцією було для вавилонян ділення. Дію $a : b$ вони звели до множення $a \cdot \frac{1}{b}$. Кожного разу, коли потрібно було обчислити $a : b = c$, говорили: «Ти візьмеш обернену до b, побачиш $\frac{1}{b}$, помножиш a на $\frac{1}{b}$, побачиш c». Тому існував великий набір таблиць, обернених величин, чисел виду $\frac{m}{125 \cdot 2^n}$ для n = 0, 1, 3, ..., 29.

Цікавий термін вживали для $\frac{1}{n}$ частини числа a. У цьому випадку писали: потрібно «відламати $\frac{1}{n}$ від a». При діленні a на кілька частин писали: «розламати a на n». Усе це свідчить, що походження дії ділення пов’язано з практичними потребами: поділом множини предметів на рівночисельні підмножини або одного предмета на рівні частини.

У клинописних табличках мало арифметичних задач. Способи їх розв'язування були засновані на ідеї пропорційної залежності й середнього арифметичного. Уявлення про арифметичну й геометричну прогресії у вавiлонян були більш розвинуті, ніж у єгиптян. Вавилоняни знали правило

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n\,,$$

розв'язували різні задачі на геометричні прогресії. Уже в епоху Хаммурапі високого рівня досягла алгебра квадратних рівнянь, розв'язували рівняння й вищих степенів.

Вавилонські задачі на квадратні рівняння — **перший зразок справжньої математичної теорії, розвинутої з потреб практики**. У випадку двох змінних одна з них *(х)* називалася довжиною, друга *(у)* — шириною, а їх добуток — площею, полем або довжиною -шириною. У кубічних рівняннях третю змінну (*z*) називали глибиною, а добуток *xyz* — об'ємом. А взагалі у задачах зустрічається від двох до десяти змінних. Хоч в умовах задач дані і змінні є геометричними величинами, вавилонські математики оперують з ними, як з абстрактними змінними, тобто обчислюють суми виду $xy + x$, $xyz + xy + x$ тощо, які з точки зору геометрії не мають змісту, бо не можна додавати об'єм, площу і довжину.

Вавилоняни знали тільки додатні раціональні числа, і тому коефіцієнти рівнянь добиралися так, щоб корені рівнянь були додатними.

Порівняно з єгиптянами вавилонські математики зробили крок уперед і в розвитку геометрії. Квадрат і трикутник вавилоняни сприймали як абстрактні фігури, про прямокутник говорили — «те, що має довжину й ширину», про трапецію — «лоб бика», про круг — «вигин», про сегмент — «поле півмісяця», фігуру з двох конгруентних сегментів із спільною хордою — «око бика». Термінів для понять: «точка», «пряма», «лінія», «поверхня», «площина», «паралельність», «перпендикулярність» ще не було. У задачах завжди йдеться про обчислення елементів плоских або просторових фігур, з якими доводилося зустрічатись архітектору, будівнику, воєначальнику, адміністратору, господарнику. Поряд з точними використовувалися й наближені методи обчислення. Довжину кола обчислювали, потроюючи діаметр.

Цій точності відповідає $\pi = 3$. З такою самою точністю обчислювали й площу круга. При цьому вавилоняни перші пов'язали число π з довжиною кола.

Одним з найвидатніших досягнень вавилонської математики було відкриття й широке застосування вже в епоху Хаммурапі **теореми Піфагора**. У клинописних текстах знаходимо обчислення площ правильних п’яти- і шестикутників, задачі на складні проценти й фактичне експериментування із спеціальними випадками логарифмів, зрозуміло, без будь-якого використання логарифмічної функції.

Видатними є здобутки шумеро-вавилонської математики.

Але шумеро-вавилоняни, як і стародавні єгиптяни, не зробили вирішального кроку до наукового періоду, хоча це не применшує їхніх заслуг, бо вони були першими.

Стародавня Греція

Учені Єгипту й Вавилона відкрили багато важливих математичних фактів, розробили алгоритми дій над натуральними й частково над дробовими числами, знайшли способи розв’язування окремих видів задач. Але наука розвивалася ще надзвичайно повільно, протягом століть, навіть протягом тисячоліття, не відбулося істотного прогресу в історії, скажімо, єгипетської або шумеро-вавилонської математики. Такий стан пояснюється деспотичною формою правління, яка панувала в суспільстві. Воля деспота вважалася законом, не могло бути й мови про вільне обговорення якихось проблем. Тому єгипетські математичні тексти починаються із слів «роби, як робиться». Після них наводиться рецепт, алгоритм, як потрібно діяти. Жодного натяку на доведення чи аксіоми ще не існувало.

Приблизно на такому самому рівні були й математичні знання стародавніх греків VIII—VII ст. до н. е. Але з VI ст. до н. е. грецька математика починає швидко збагачуватися новими фундаментальними фактами, докорінно змінює, а точніше знаходить свій предмет і метод. Вона перетворюється в абстрактну дедуктивну науку, предметом вивчення якої стають **математичні поняття**. Методом дослідження відношень між ними стають **логічні доведення**, засновані на системі аксіом і раніше доведених теоремах. Греки перші прийшли до ідеї доведення і надали доведенням логічної форми, яка зберігається і тепер.

Власне з цього часу й починається історія математики як теоретичної галузі знання. Одночасно формується й думка про те, що математика — універсальна мова для відображення законів природи, знаряддя розв’язування практичних задач.

Протягом трьох століть учені Стародавньої Греції створили теорії, глибину яких по-справжньому змогли зрозуміти й оцінити лише математики XIX і XX ст.

Першим ученим Античної Греції був **Фалес Мілетський** (638/637 — 548/547 рр. до н. е.). Можливо саме завдяки йому почалося перетворення єгипетської і вавилонської емпіричної математики в дедуктивну науку. Славу засновника давньогрецької математики поділяє з Фалесом легендарний **Піфагор Самоськи**й (571/570—497/496 рр. до н. е.), який перетворив геометрію із зібрання рецептів розв’язування різних задач в абстрактну науку, що розглядала вже не площі полів, місткість зерносховищ, дамб, штабелів цегли тощо, а геометричні фігури — абстракції, ідеалізації певних властивостей реальних об’єктів.

У школі Піфагора зародилася теорія чисел, учення про правильні многокутники. Піфагорійці відкрили **несумірні відрізки**, і це стало поворотним пунктом усієї історії математики. Величезна заслуга піфагорійців у тому, що вони виявили фундаментальне значення кількісних характеристик явищ навколишньої дійсності: кожну просторову форму або явище характеризує цілком визначена числова модель — число. Проте піфагорійці перебільшили його роль. Вони оголосили числа не тільки всесильними правителями, законодавцями світу, а й першоосновою речей і явищ навколишньої дійсності.

Відкриття відрізків, відношення яких не можна виразити числом (вірніше — ніяким додатним раціональним числом, бо тільки такі числа і знали на той час), стало справжньою катастрофою піфагорійської філософії і зумовило створення так званої **геометричної алгебри**. Теореми, правила й задачі алгебри подавали в термінах відношень між довжинами відрізків і площами прямолінійних фігур. Геометрична мова стала використовуватися і в теорії чисел. Числа зображали точками або відкладали певну кількість разів відрізок, довжину якого брали за одиницю.

У V ст. до н. е. були сформульовані три знамениті задачі про квадратуру круга, подвоєння куба й трисекцію кута, які привернули загальну увагу і відіграли величезну роль в історії математики. Спроби розв’язати їх засобами класичної геометричної алгебри й пошуки різних некласичних способів розв’язування спричинилися до введення в математику нових понять, до розробки різних способів розв’язування задач. Тільки в другій половині XIX ст. математики дали вичерпну відповідь на запитання, поставлені давньогрецькими вченими в цих задачах.

Не встигли математики зміцнити логічний фундамент своєї науки після удару по ньому, завданому несумірністю, як філософ елейської школи **Зенон Елейський** (бл. 490 — бл. 430) висунув свої **45 апорій** (απορια — тупик, утруднення, безвихідь), в яких у наївній і далекій від математики формі вказував на логічні суперечності, що їх несло в собі поняття нескінченності.

Розглядаючи якийсь процес, можна припустити, що після кожного виконаного кроку — геометричної побудови, арифметичної або алгебраїчної операції завжди можна виконати наступний крок. Так приходимо до абстракції потенціальної нескінченності. Коли ж абстрагуватися від нескінченного процесу утворення множини й розглядати її завершеною, заданою набором усіх своїх елементів, актуально заданою, то приходимо до абстракції актуальної нескінченності, яка викликала справжні логічні катастрофи в філософії і математиці.

Молодший сучасник Зенона видатний учений-матеріаліст **Демокріт із Абдер** (бл. 460 — бл. 380) розробив теорію атомістичної математики. Він розглядав точки як неподільні атоми простору, які мають скінчений об’єм. Тоді відрізки прямої — це скінченні, хоча й з дуже великою кількістю елементів, множини точок, частини площини складаються із сум відрізків, а тіла — із шарів площин.

Гіппократ Хіоський (V ст. до н. е.) перший відкрив фігури, обмежені дугами кіл (серпки Гіппократа), сума площ яких рівновелика прямокутному трикутнику. **Гіппій із Еліди** (420 р. до н. е.) винайшов криву лінію — **квадратрису**, за допомогою якої здійснив **трисекцію кута**, а **Діностратˮ** (2-га половина IV ст. до н. е.) розв’язав задачу квадратури круга. Надзвичайно дотепне некласичне розв’язання задачі подвоєння куба дав у цей час видатний учений, механік, математик, філософ, музикант і політичний діяч **Архіт Тарентський** (бл. 428—365 рр. до н. е.).

Визначні результати здобув давньогрецький математик і астроном **Евдокс Кнідський** (бл. 406 — бл. 365 рр. до н. е.). **Він розробив логічно бездоганну теорію відношень**, яка до другої половини XIX ст. була найдосконалішою теорією дійсного числа — складовою частиною логічного обґрунтування всієї математики. **Евдокс — творець методу вичерпування першого вчення про границі.** Застосувавши саме метод вичерпування, вдалося обчислити границі широкого класу послідовностей і завдяки цьому визначити площі та об’єми різних фігур, обмежених кривими лініями й криволінійними поверхнями. До винайдення інтегрального числення метод вичерпування був найбільш потужним і загальним алгоритмом розв'язування задач на обчислення квадратур і кубатур.

Несумірні відрізки були геометричною формою ірраціональностей, які владно входили в математику. їх не міг зупинити опір піфагорійців, які стали рабами своєї обмеженої числової філософії. Видатний математик **Теетет Афінський** (IV ст. до н. е.) довів нові важливі теореми про несумірні відрізки і дав класифікацію всіх можливих пар несумірних відрізків.

Кінець V і початок IV ст. до н. е. — золоте століття історії Афін. Тут жили й працювали видатні вчені античного світу: **Анаксагор із Клазомен**, **Демокріт із Абдер**, **Гіппій із Еліди**, математик **Феодор Кіренський**, патріарх античної медицини **Гіппократ з Коса**, філософ **Сократ**. Платон засновує в цей час знамениту Академію, Арістотель — Лікей, прообраз майбутніх університетів.

У кінці IV ст. до н. е. на політичну арену виступає Македонія, яка досягає апогею за царювання **Александра Македонського** (356—322 рр. до н. е.). Після його завойовницьких походів грецька культура й мова переплітаються з культурою підкорених народів, у результаті чого утворюється так звана елліністична культура.

Це була вже нова епоха не тільки в історії суспільства, а й математики.

Елліністичні країни і Римська імперія

Епоха еллінізму починається з часів походів Александра Македонського за межами Греції в 332—323 рр. до н. е. Після смерті Александра утворена ним імперія розпалася на окремі країни, у них правили династії, засновані його воєначальниками. Найбільшого успіху науки досягли в країні династії Птолемеїв — Єгипті. У столиці країни — Александрії був створений **науковий центр Мусейон** і при ньому величезна бібліотека, в якій налічувалося понад **700`000 манускриптів**. У Мусейоні працювали найвидатніші вчені того часу. Особливого розквіту досягли в цей період точні науки, насамперед математика.

В епоху еллінізму творили видатні вчені античного світу: **Евклід** (IV ст. до н. е.), **Архімед із Сіракуз** (бл. 287—212 рр. до н. е.), **Аполлоній Пергський** (бл. 250—170 рр. до н. е.).

На жаль, ми майже нічого не знаємо про життя Евкліда, автора знаменитих **«Начал» — книги, яка на тисячоліття стала зразком викладу наукових теорій і підручником, за яким вивчало геометрію не одне покоління.**

Архімед належить до тих геніїв, творчість яких на багато віків визначила долю науки. За вагомістю здобутих результатів і силою таланту з ним можуть зрівнятися лише Ньютон і Ейлер. Справою життя Архімеда була математика. Він створив нові методи обчислення площ і об'ємів фігур, обмежених кривими лініями й криволінійними поверхнями; відкрив багато глибоких залежностей у геометричних фігурах; йому належать видатні відкриття в механіці, гідростатиці, оптиці й технічні винаходи.

Аполлоній Пергський — автор багатьох математичних праць, зокрема 8 книг «Про конічні перерізи» (збереглося 7 книг), в яких повно й глибоко викладено теорію кривих ліній другого порядку. У цей же час в Александрії працював **Ератосфен Кіренський**, який займався арифметикою, геометрією, астрономією, хронологією, географією, історією, мовознавством, писав вірші.

У кінці III ст. до н. е. починаються римські завоювання. У 212 р. до н. е. Римська армія захопила Сіракузи, при цьому від меча римського легіонера загинув і великий Архімед. До 146 р. до н. е. римляни підкорили й перетворили на пустелю майже всю материкову Грецію. Квітучі міста лежали в руїнах, гинули люди й безцінні скарби античної культури. 31 р. до н. е. римські легіонери взяли Александрію. При цьому згоріла частина знаменитої бібліотеки Мусейону.

Умови для наукової роботи були надзвичайно несприятливими і математичні дослідження в країнах, підкорених римлянами, майже повністю припиняються. Талановиті інженери, винахідники, астрономи, що працювали в Александрії та інших містах, розв'язували окремі цікаві задачі, доопрацьовували деталі у великих творіннях попередників, але не змогли висунути нових продуктивних ідей чи створити великі узагальнюючі праці.

Герон Александрійський (І ст.) — талановитий інженер і винахідник, викладав у Мусейоні, конструював різні машини. У його книжці **«Метрика»** міститься відома **формула Герона для обчислення площі трикутника**.

Менелай Александрійський (І—ІІ ст.) **в книжці «Сферика» дав систематичний виклад сферичної геометрії** — першої геометричної системи, відмінної від евклідової. Близько середини II ст. в Александрії працював знаменитий астроном **Клавдій Птолемей** (пом. 170 р.). Його «Математична побудова» («Альмагест» — від грецьк. «найбільша») містила математичну модель видимого руху небесних тіл — відому **Птоломеєву геоцентричну систему світу**.

Своєрідним чудом, загадкою історії є **«Арифметика» Діофанта Александрійського**, яка з'явилася в III ст. У книжці надзвичайно багато нових ідей, цікавих задач, а також загадок. Чимало цих загадок ще й досі не розв'язані, хоч над ними працювали видатні математики різних епох і народів.

На початку IV ст. в Александрії працював прекрасний знавець античної математики **Папп**, автор цікавої книжки **«Математичне зібрання»**, в якій сформульовано і доведено ряд важливих теорем елементарної і проективної геометрії.

У цей час набирає сили християнська релігія, яка виникла на початку нашої ери. Церковники спрямували свою ненависть проти всієї античної науки й культури. У полум'ї пожеж гинули не тільки язичеські храми, а й безцінні скарби людської думки — книжки. Учених переслідували або й знищували. Так, у березні 415 р. в Александрії натовп ченців по-звірячому вбив відому жінку-вченого, філософа і математика **Гіпатію Александрійську** за те, що вона не прийняла християнства.

У 529 р. імператор Юстиніан закрив Афінську академію, і вчені залишили Афіни, більшість їх переїхала в Іран. Наукові центри античного світу припинили своє існування.

Індія

Перші математичні тексти індійської математики належать до II — I тис. до н. е. Це трактати, наприклад **«Шульва — сутра»** (**«Правила вірьовки»**, в яких розгортаються різні правила вимірювань і побудови храмів, жертовних вівтарів та інших культових споруд. У IV ст. з'являються астрономо-математичні твори — «сіддханти» (вчення). Більшість з них написані віршами, мовою священних книг брахманів — санскритом. Виклад у них догматичний. Креслень, формул і доведень ще немає. Автори формулюють алгоритми певних дій над числами, правила розв'язування задач, наводять добірки вправ і зразки їх розв'язання. В індійській математиці не було зроблено й спроби побудови дедуктивної математичної теорії на зразок «Начал» Евкліда.

Лічба цілих чисел була десятковою. Рано визначилася схильність індійських математиків до оперування з великими числами, тому в санскриті є назви для чисел виду 10^n для $n > 50$.

У VI ст. поширилися цифри брахми, в яких були спеціальні знаки для чисел 1—9, що стало передумовою створення десяткової позиційної системи числення. Перші відомості про неї знаходимо в рукописі 662 р. християнського єпископа Себохта. У настінному написі, який було виконано в **876 р.**, **з’являється нуль** — там записано число 270.

Одна з назв нуля **«шунья»** (порожнє) арабські вчені переклали словом «сифр», а європейські латинською мовою просто записали словом ***ciffra***, звідки й походить термін «цифра».

Позиційна нумерація — найвидатніше досягнення індійської математики.

Наша арифметика, без сумніву, індійського походження. Індійські вчені розробили правила арифметичних дій, засновані на десятковій позиційній системі числення — **чотири арифметичні дії, піднесення до квадрата й куба, добування квадратних і кубічних коренів**. Обчислення виконувалися на лічильній дошці, покритій пилом або піском, і тому називалися «роботою з пилом».

Видатним досягненням індійської математики було створення розвинутої алгебраїчної символіки. Вперше з’являються позначення для багатьох невідомих, вільного члена рівняння, степенів. Більшість символів є першими складами відповідних санскритських термінів. Наприклад, невідома величина називалася «йават — товат» (стільки-скільки) і позначалася складом «йа». Якщо невідомих було кілька, їх позначали назвами кольорів.

Блискучим, періодом індійської математики були V—XII ст., коли працювали видатні вчені.

Особливо великий вплив на дальший розвиток індійської астрономії і математики мала діяльність Коперніка Сходу — **Аріабхати І** (нар. 476 р.). Його трактат **«Аріабхатія»** став поворотним пунктом розвитку точних наук в Індії.

Послідовником і коментатором ідей Аріабхати І був **Бхаскара І** (VII ст.), який у своїх трактатах розробляв теорію діофантових рівнянь і астрономічні проблеми.

На середину IX ст. припадає творчість **Магавіри**, автора **«Короткого курсу математики»**, першого індійського трактату, повністю присвяченого математиці. За об'ємом цей написаний віршами твір значно більший, ніж усі роботи попередників і сучасників Магавіри.

Велике значення для розвитку фізико-математичних наук в Індії мала творчість видатного індійського астронома й математика **Бхаскари II** (нар. 1115 — пом. пізніше 1183 р.). Ще за життя вченого організувалися спеціальні школи, в яких вивчалися його твори. Математиці присвячені трактати Бхаскари II «Лілаваті» і «Біджаганіта». І досі не визначено, кого називав учений таким ласкавим ім'ям: арифметику, якій присвячено «Лілаваті», чи свою доньку.

Трактат «Біджаганіта» присвячений алгебрі й деяким питанням геометрії. Зокрема, там Бхаскара II дає два наочні доведення теореми Піфагора.

Індійські математики ввели і правильно трактували від'ємні числа. Так, Брахмагупта (нар. 598 р.) називає додатні числа майном, а від'ємні — боргом і, використовуючи ці терміни, дає правила дій над раціональними числами.

Календарно-астрономічні задачі привели індійських математиків до діофантових рівнянь, у розв'язуванні яких були здобуті великі успіхи. **Аріабхата I** розв'язував у цілих числах рівняння виду $ax + b = cy$, Брахмагупта й Бхаскара II розв'язували в натуральних числах рівняння $ax^2 + b = y^2$ і його важливий окремий випадок $ax^2 + 1 = y^2$.

Значно менших успіхів досягли індійські вчені в галузі геометрії. Окремих праць з геометрії не було. Геометричний матеріал міститься в астрономічних і математичних трактатах, при цьому теореми з геометрії наводяться без доведень. Усе зводиться до креслень, часто надзвичайно виразних, і слова «дивись». Зрідка даються короткі вказівки про шлях доведення твердження.

У V ст. до н. е. індійські математики брали π = 3,1416. Послідовник Магавіри — **Шрідхара** (IX — X ст.) наводить у своєму трактаті правильні формули для обчислення об'єму призми, зрізаного кругового конуса. **Бхаскара II — формулу об'єму кулі.** При розв'язуванні астрономічних задач використовувалися тригонометричні співвідношення

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha), \sin(\alpha \pm \beta) \text{ та ін.}$$

На початок XX ст. припадає творчість геніального індійського математика **Сринівази Айєнгара Рамунуджана** (1887—1920). Його самобутній талант, віртуозне володіння математичними методами викликали захоплення вчених усього світу. Особиста доля вченого відобразила трагічну історію талановитого індійського народу, який століттями перебував у ярмі англійського імперіалізму і тільки в 1947 р. здобув політичну незалежність.

Індійська математика справила величезний вплив на розвиток математики Сходу і Заходу. Індійські вчені відкрили алгоритми дій над числами в десятковій позиційній системі числення. Тому Індія стала батьківщиною численних термінів в арифметиці, алгебрі, тригонометрії.

Китай

За багатовікову історію китайські вчені зробили багато визначних відкриттів у різних галузях науки і техніки. Вони винайшли компас, сейсмограф, спідометр, книгодрукування, технологію виготовлення паперу, фарфору, пороху. З VII ст. до н. е. китайські астрономи вміли завбачувати сонячні й місячні затемнення, встановили періодичність їх повторення, а в IV ст. до н. е. був складений перший в світі зоряний каталог.

Математичні знання китайців формувалися в глибокій давнині, але **перші математичні тексти, що дійшли до нас, датовано І тисячоліттям до н. е.** Більш ранні, очевидно, були знищені в 213 р. до н. е., коли імператор-тиран наказав спалити всі книжки.

У стародавньому Китаї викладанню математики надавалося великого значення. Усі, хто претендував зайняти посаду чиновника державної служби, складали спеціальні екзамени, серед яких був і екзамен з математики.

Китайська ієрогліфічна нумерація, що виникла в II тисячолітті до н. е., застосовується в Китаї до цього часу. У давні часи арифметичні операції виконувалися на лічильній дошці за допомогою лічильних паличок з бамбука, слонової кістки або металу.

Дроби з’явилися майже одночасно з натуральними числами. Дії першого ступеня виконувалися майже так, як це робимо ми й тепер, множення і ділення дробів інтерпретувалося на конкретних задачах обчислення площ земельних ділянок, розподілу, наприклад, монет між кількома рівноправними особами. Щоб опанувати нові математичні об’єкти і дії над ними, китайські математики допускали й дробове число людей.

Від'ємні числа називали «фу» (борг), додатні — «чжен» (майно). Спочатку «фу» з'являлися й зникали в процесі обчислень як різниці двох чисел «чжен» і тільки пізніше почали виступати як окремі об'єкти, що стало вирішальним кроком на шляху **введення від'ємних чисел**.

Після введення від'ємних чисел лічильні палички виготовляли двох кольорів: червоні — для позначення додатних чисел, чорні — від'ємних. Пізніше на основі лічильної дошки виник лічильний прилад «суань-пань», що нагадує рахівницю. Японці називають його «сарабан».

Найдревніший математичний трактат «Математика в дев'яти книгах» зредагував фінансовий чиновник Чжан Цан (пом. 150 р. до н. е.). Книга призначалася для землемірів, інженерів, чиновників, торгівців. У трактаті зібрано 246 задач. Виклад догматичний. Спочатку формулюється умова задачі, потім дається відповідь і стисла вказівка щодо способу розв'язування.

Деякі задачі присвячені арифметиці дробів, обчисленню площ плоских фігур, об'ємів, системам двох лінійних рівнянь з двома змінними, системам n рівнянь з n змінними, які розв'язуються способом «фан-чен» (буквально — вистроювання чисел по клітинках). Є задачі, які розв'язуються за допомогою теореми Піфагора.

«Математика в дев'яти книгах» увійшла в збірник десяти трактатів, який був посібником для підготовки чиновників до кваліфікаційних екзаменів. У збірник входили також «Математичний трактат» Сунь-цзи, **«Трактат про морський острів»** визначного математика **Лю Хуея** (III ст.), **«Математичний трактат» Чжан Цюцзяня** (V ст.).

Трактат Сунь-цзи містив математичні таблиці, арифметичні задачі на складання систем лінійних рівнянь, геометричні, на встановлення співвідношень між різними одиницями вимірювання. У книзі Лю Хуея розглядалися задачі на визначення відстаней до недоступних предметів і розмірів цих предметів. Чжан Цюцзянь, розвиваючи ідеї своїх попередників, приділив багато уваги новим математичним проблемам: вивченню числових рядів, рівнянням вищих степенів, теоретико-числовим задачам.

Вершиною досягнень китайських математиків у розв'язуванні задач, які приводять до системи n лінійних рівнянь з n невідомими, є спосіб «фан-чен», викладений у «Математиці в дев'яти книгах» (кн. VIII). Він близький до методу визначників, ідею якого в Європі вперше висловив німецький математик Г. В. Лейбніц (1646—1716), а розвинув швейцарський математик Габріель Крамер (1704 — 1752). Близько V ст. в Китаї був розроблений алгоритм наближеного обчислення коренів кубічного рівняння $x^3 + ax^2 = b$, а в VII ст. — і повного кубічного рівняння.

Алгебраїсти XIII—XIV ст. поширили метод чисельного розв'язування кубічних рівнянь на рівняння вищих степенів.

З коментарів до найдавнішого астрономічного твору «Трактату про мірну віху» відомо, що доведення теореми Піфагора для прямокутного трикутника із сторонами 3, 4, 5 було знайдене в XII ст. до н. е., а в загальному випадку її доведення знали в VI ст. до н. е.

Математики й астрономи I—III ст. приділили багато уваги уточненню відношення довжини кола до діаметра. Астроном і філософ Чжан Хен (78—129) знайшов наближення $\pi = \sqrt{10} = 3{,}162 \ldots$, Вань Фань (пом. 267) дістав $\pi = \frac{142}{45} = 3{,}155 \ldots$, Лю Хуей — $\pi = 3{,}14159$. Астроном, математик та інженер Цу Чунчжі (430—501) довів, що $3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$, йому ж належить наближення $\pi = \frac{355}{113}$.

Наведені факти показують, що китайська математика розвивалася як зібрання обчислювальних алгоритмів і різних способів розв'язування практичних задач. При цьому широко використовувалися тотожні алгебраїчні перетворення і взаємно однозначні перетворення площин. Було відкрито цілий ряд важливих математичних залежностей, хоча китайська математика, як і індійська, мала практичний характер і мало була схожа на дедуктивну математику античної Греції.

Як і математичні знання інших народів, китайська математика розвивалася не ізольованою, а у взаємному культурному обміні, взаємозбагачена досягненнями інших народів, насамперед індійського і країн ісламу.

Країни ісламу

У VII ст. на Аравійському півострові виникла нова релігія — іслам Її заснував Магомет. Послідовники цієї релігії називаються мусульманами. Наступники Магомета (халіфи) протягом VII—IX ст. завоювали велетенські території, на яких утворилася держава — арабський халіфат. До його складу входили вся північна Африка, Піренейський півострів, південь Італії, Середня Азія, частина Закавказзя та Індії. На цих територіях державною стала арабська мова. Тому науку, зокрема й математику цього часу, часто називають арабською, що, звичайно, неправильно, її творили представники різних народів, які змушені були працювати в столицях окремих держав халіфату (наприклад, Дамаску, Багдаді) і писати арабською мовою. На територіях халіфату в різні часи відбувалися жорстокі війни, у результаті яких окремі народи ставали жертвами навал завойовників. Так, у XI ст. Середню Азію, Іран, Сірію і Месопотамію загарбали турки-сельджуки. У XIII ст. монголи вбили останнього халіфа й ліквідували арабський халіфат.

Ученим доводилося працювати в надзвичайно важких умовах безперервних воєн і переслідувань. Чимало з них жили полоненими або поневірялися на чужині.

У VIII—X ст. на арабську мову було перекладено індійські сіддханти («вчення»), праці Евкліда, Архімеда, Аполлонія, Менелая, Птолемея, Діофанта та інших учених. Засвоївши наукову спадщину минулого, учені країн ісламу створили і власну своєрідну математичну культуру. **Головні зусилля вчені спрямовували на розв'язання практичних задач**, на основі яких формувалися нові плідні математичні ідеї. Вони виконали важливі теоретичні дослідження в галузі арифметики і теорії чисел, алгебри, геометрії і тригонометрії.

Великою заслугою вчених країн ісламу була популяризація й поширення десяткової позиційної системи числення. Її виклав видатний таджицький математик, астроном і географ **ал-Хорезмі Абу Абдалла Мухаммед ібн Муса ал-Маджусі** (787 — бл. 850). Народився цей вчений у Хорезмі, жив і працював при дворі халіфів у Багдаді, де ймовірно очолював своєрідну академію — «Будинок мудрості».

Від латинізованої форми прізвища ал-Хорезмі походить сучасний термін **«алгоритм»**. Назва його праці «Кітаб ал-джебр ал-мукабала» дала назву великому розділу сучасної математики — **алгебрі**. Операція ал-джебр означає перенесення членів рівняння з однієї частини рівняння в другу так, щоб в обох частинах були тільки додатні члени; ал-мукабала — зведення подібних членів.

Квадратні рівняння ал-Хорезмі розв'язує за допомогою геометричних побудов, трактуючи x як відрізок, x^2 — як квадрат із стороною $|x|$. У X ст. квадратні рівняння розв'язують уже без геометричних побудов.

Багдадський математик і астроном **Абу-л-Вафа Мухаммед ібн Мухаммед ал-Бузджані** (10.VI.940— 1.VIII.998) прославився працями з геометрії, тригонометрії і практичної астрономії, оригінальною **«Книгою про те, що потрібно реміснику з геометричних побудов»**. Арифметичний трактат Абу-л-Вафи був єдиною в країнах ісламу книгою, в якій на той час застосовувалися від'ємні числа.

Різносторонній математик, географ, астроном, історик, етнограф і поет **Абу-р-Рейхан-Мухаммед ібн Ахмед ал-Біруні** (973—1048) народився в м. Кяти. Його математичні праці присвячені майже всім розділам сучасної йому математики. Розв'язуючи конкретні задачі, Біруні висував плідні математичні ідеї. Наприклад, досліджуючи відношення довжини кола до його діаметра, прийшов до ідеї введення додатних ірраціональних чисел.

Багато уваги приділив математиці відомий природодослідник, лікар і поет, таджик за національністю **Ібн Сіна Абу Алі ал-Хусейн ібн Абдалла** (Аві-ценна) (бл. 980—18.VI.1037).

Іранський математик **ал-Караджі**, або **ал-Кархі**, (пом. 1016) — автор двох великих математичних трактатів з арифметики та алгебри. У цих працях він не тільки підсумував результати деяких своїх попередників, а й зробив власні цікаві додатки.

Багато важливих відкриттів у різних розділах математики зробив видатний перський математик, астроном, філософ і поет **Хайям Абу-л-Фатх Омар ібн Ібрахім** (1048—бл. 1131). **Він дав повну класифікацію кубічних рівнянь й геометрично розв'язав 14 їх видів (форм).** Дійсні корені таких рівнянь учений шукав як точки перетину кривих ліній другого порядку. Хайяму належить цікава спроба довести знаменитий V постулат Евкліда.

При дворі монгольського Хулагу-хана жив і працював відомий азербайджанський математик і астроном **ат-Тусі Насір ад-Дін Абу Джафар Мухаммед ібн Мухаммед** (17.II.1201—1274). У м. Маразі він організував одну з кращих для того часу астрономічну обсерваторію, для роботи в якій було запрошено вчених з різних міст. Вони провели ряд важливих математичних і астрономічних досліджень.

У Самаркандській астрономічній обсерваторії Улугбека Мірзи Мухаммеда ібн Шахруха ібн Тіму-ра (22.III.1394—1449) працював відомий математик і астроном **Гійас ад-Дін Джемшід ал-Каші** (пом. бл. 1430 р.). Ал-Каші опублікував у 1427 р. трактат **«Ключ арифметики»** — цікавий посібник з елементарної математики, в якому виклав теорію та алгоритми дій з десятковими позиційними дробами. Це визначне відкриття в Західній Європі зробив Симон Стевін (1548—1620) тільки через 135 років. У **«Трактаті про коло»** ал-Каші за допомогою обчислення периметрів правильних вписаних у коло многокутників, аж до $3 \cdot 2^{28}$-кутника, дістав 17 правильних десяткових знаків числа 2π = 6,28311853071795865. Цей результат у 1597 р. знову дістав А. ван Роомен за допомогою вписаних многокутників (до 2^{30}-кутника).

Багато уваги приділили вчені країн ісламу обчислювальній математиці, астрономічним і тригонометричним обчисленням. Вони відкрили ряд важливих залежностей прямолінійної, і сферичної тригонометрії. Майже всі вони прагнули вдосконалити «Начала» Евкліда. Йшлося, насамперед, про розкриття таємниці теорії паралельних. V постулат Евкліда прагнули довести Омар Хайям, ат-Тусі і багато інших математиків країн ісламу. При цьому було зроблено ряд видатних відкриттів, які підготовляли відкриття неевклідової геометрії.

На початку XI ст. в райони Іспанії, звільнені від маврів, почали приїжджати вчені з багатьох країн Західної Європи, щоб ознайомитися з математичними й природничими науками. Там перекладалися з арабської на латинську мову праці учених країн ісламу та античного світу. Сучасні терміни: цифра, арабська цифра, алгебра, алгоритм, корінь, синус, численні астрономічні терміни й назви багатьох зірок теж походять з Близького Сходу. Наука Західної Європи зводилася швидкими темпами на міцному фундаменті досягнень попередників, зокрема математиків країн ісламу.

Математика країн ісламу — важливий етап історії фізико-математичних наук. У рамках арабського халіфату досягла високого рівня нова специфічна культура. Першим науковим центром став заснований в 762 р. Багдад, де за каліфа ал—Мамуна (813— 833) виникла знаменита академія «Будинок мудрості». У ньому працювали вчені з багатьох країн. У різні періоди середньовіччя широкою славою користувалися наукові центри в Дамаску, Реї, Бухарі, Хорезмі, Газні, Самарканді, Ісфахані, Маразі.

Особливого значення в державах каліфів надавалося астрономії, яка задовольняла потреби морської і сухопутної торгівлі, зрошувального землеробства і популярної в той час астрології. Астрономи багдадської школи вперше після Ератосфена Кіренського виміряли довжину градуса земного меридіана.

Багато уваги приділялося в цей період математичній географії, фізиці, геодезії, механіці, конструюванню різних інструментів. Оскільки всі ці науки ґрунтувалися на математиці, особливо обчислювальній, це визначило основні напрями розвитку математичних досліджень. Математики країн ісламу багато працювали над розробкою обчислювальних алгоритмів для розв’язування арифметичних, алгебраїчних і геометричних задач, спочатку простих, а потім і досить складних. У процесі їх розв’язування проводились теоретичні дослідження, виникали нові математичні поняття, які потім об’єднувалися в наукові теорії. Саме в цей період формувалися як окремі дисципліни плоска і сферична тригонометрія. Продовжуючи традиції, які складалися в грецькій і елліністичній математиці, вчені країн ісламу досягли певних успіхів, які великою мірою визначили дальший розвиток математики.

Увагу вчених країн ісламу привертали загальні питання геометрії, насамперед теорія паралельних. Вони були далекі від думки про створення неевклідової геометрії і спрямовували свої зусилля на доведення V постулату Евкліда з припущень або принципів, які вважали більш очевидними, ніж сам постулат. Усі такі спроби були марними, оскільки V постулат логічно незалежний від інших аксіом Евкліда і не може бути доведений на їх основі шляхом логічних висновків. Але в математиці іноді невдачі стають корисними. Математики країн ісламу, наприклад, намагаючись довести V постулат, зробили водночас визначні відкриття: довели залежність між цим постулатом і величиною суми внутрішніх кутів трикутника, встановили логічну еквівалентність ряду висловлень теорії паралельних, довели деякі твердження, які були, по суті, першими теоремами геометрії Лобачевського і Рімана.

Розв’язування задач на обчислення площ і об’ємів стало ще однією сходинкою на шляху до розробки методів диференціального та інтегрального числення.

Середньовічна Європа

Епоха, коли в Західній Європі формувалися й панували феодальні відносини, тобто від V—VI ст. до кінця XVI ст. називається середніми віками.

Про рівень знань VII—VIII ст. в Західній Європі свідчать слова ірландського ченця **Бєди Вельмиповажного** (бл. 673—735): «Хто вміє ділити, тому ніяка справа не здаватиметься важкою. Я знаю багато складних речей, але немає нічого складнішого, ніж дії з дробовими числами». А тим часом Бєда був одним з найосвіченіших людей того часу. Про низький рівень математичної культури і умови роботи вчених свідчить і той факт, що серед звинувачень, висунутих проти самого папи римського Сільвестра II (Герберта) (бл. 940—1003) було й те, що він вміє ділити будь-які великі числа. В очах церковників це було незаперечним свідченням того, що він (навіть будучи папою римським) продався сатані. З XII ст. починають діяти слідчі органи церкви, які потім організувалися в інквізицію. Так, за наказом глави іспанської інквізиції Торквемади (1420—1498) було спалено живими 10 220 чоловік. У 1486 р. він послав на вогонь іспанського математика **Паоло Вальмеса** тільки за те, що той мав необережність розповісти про свій успіх — розв'язання рівняння четвертого степеня. Ученого звинуватили в спілкуванні з нечистою силою, бо він зробив те, що «з волі божої людському розуму не дано».

Природно, що середньовічна Європа мало дала для математики. Минуло тисячоліття, поки завдяки діяльності невтомних поборників і пропагандистів науки вдалося подолати шалений опір церковників, недовір'я і ворожість до математичних наук. При дворі франкського короля Карла Великого працював **Алкуїн** (735—805) — організатор ряду шкіл і автор посібників з математики. З них найпопулярніший **«Задачі для удосконалення розуму юнаків»** — один з перших збірників цікавих задач з математики.

На початок XIII ст. припадає діяльність видатного математика середньовіччя, рішучого прихильника індійської арифметики **Леонарда Пізанського** на прізвисько **Фібоначчі**, що означає син Боначчо (1180—1240). У **«Книзі абака»** Леонардо систематизував величезну кількість математичних фактів і виклав їх з надзвичайною повнотою і глибиною. Багато задач з цієї книги використовувались у збірниках цікавих задач. Деякі з них були узагальнені й розвинуті в математичні теорії.

Видатним математиком, який значно перевершував своїх сучасників, був французький учений **Ніколь Орем** (бл. 1323—1382). У **«Трактаті про відношення»** і **«Алгоритмі відношень»** він дав правила дій з дробовими додатними показниками степенів, підійшов до поняття ірраціонального показника степеня. У великій книзі **«Про конфігурації якостей»** Орем розвинув ідею функціональної залежності, розроблену англійцем **Річардом Суайнсхедом** (бл. 1350 р.).

Епоха Відродження

XV і XVI ст. ввійшли в історію під назвою епохи Відродження, тобто відродження рівня науки, мистецтва, якого було досягнуто в античному світі. На епоху Відродження припадає діяльність таких визначних учених, як **Леонардо да Вінчі**, **Галілео Галілей** і **Мікола Копернік**. Математика стає особливо популярною — у ній шукають останній критерій істини.

Наука, в тому числі й математика, в цей час розвивалася в умовах жорстокого терору церковників. 11 лютого 1600 р. в Римі на площі Квітів було спалено поборника наукової істини **Джордано Бруно**.

Розправи над прогресивними вченими не зупинили людської думки. Нових успіхів досягає математика, яка розвивається головним чином в Італії, Франції, Німеччині, а пізніше і в Голландії. Помітним явищем в історії математики була діяльність **Луки Пачолі** (бл. 1445 — бл. 1515), який у 1494 р. опублікував велику працю **«Сума знань з арифметики, геометрії, відношень і пропорційності»**. У ній містилися різні правила арифметичних дій, алгебраїчні обчислення. Пачолі широко використовує алгебраїчну символіку, розроблену італійськими алгебраїстами XVI ст. Наступний крок у розробці математичної символіки зробили німецькі алгебраїсти XVI ст. — «косисти», серед яких найбільш відомі — **Міхаель Штіфель** (1486—1567) та **Адам Різе** (1489—1559). Термінологія косистів була поширеною в Європі. Нею користувався й Л. П. Магніцький у своїй «Арифметиці».

Видатні досягнення в XVI ст. належать італійським ученим. Талановитий самоук математик і механік **Ніколо Тарталья** (1500—1557) розв’язав у радикалах кубічне рівняння типу

$$x^3 = ax + b$$

і деякі інші типи неповних кубічних рівнянь. **Джіроламо Кардано** (1501—1556), давши клятву, що нікому не розголосить таємниці, вивідав у Тартальї секрет йото відкриття. Кардано був талановитим математиком, йому вдалося узагальнити і поширити цей метод Тартальї на інші типи неповних, а потім і на повні кубічні рівняння.

У 1545 р. Кардано опублікував книгу **«Велике мистецтво, або про алгебраїчні правила»**, в якій, порушивши дану Тартальї клятву, опублікував його і свої відкриття, а також відкритий **Луїджі Феррарі** (1522—1565), учнем Кардано, метод розв’язування в радикалах рівняння четвертого степеня. Результати Тартальї, Кардано і Феррарі мали величезне значення для дальшого прогресу алгебри і всієї математики. Хоча знайдені формули не давали якихось переваг перед наближеними методами, їх відкриття стало кроком вперед порівняно із здобутками древніх. Перед наукою відкрилися нові глибокі проблеми: насамперед питання про розв’язність у радикалах рівнянь вищих степенів, яке привело спочатку до створення теоретико-групового методу досліджень у математиці, а потім і одного з найбільш глибоких і плідних розділів сучасної математики — теорії груп.

Уже при розв’язуванні квадратних рівнянь доводилося добувати квадратні корені з від’ємних чисел. Індійські математики вважали, що такі квадратні рівняння не мають розв’язків і здобуті корені не брали до уваги. Кардано і його сучасники зустрілися з новим явищем: у випадку, коли всі коефіцієнти і корені кубічного рівняння $x^3 + px + q = 0$ були дійсними, за формулою Тартальї-Кардано

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

доводилося під кубічними коренями добувати квадратний корінь з від'ємного числа. Ось приклад такого рівняння

$$x^3 - 21x + 20 = 1,$$

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}, \quad (*)$$

хоча воно має всі дійсні корені: (—5), 1, 4. Робилися спроби звільнити формулу (*) від добування квадратного кореня з від'ємних чисел, бо це призводило до уявних чисел, а також звести її до оперування з дійсними числами, але ці пошуки були безуспішними. Тому цей випадок і був названий незвідним.

Так логіка розвитку самої математики змусила математиків зробити ще один крок у розширенні поняття числа — **ввести комплексні числа**. Ці надзвичайно важливі математичні об'єкти були введені з потреб математики, але з часом знайшли широке застосування в розв'язуванні найрізноманітніших практичних задач — гідро- і аеродинаміки, біології, техніки, космонавтики.

Значення комплексних чисел розумів уже Кардано. Правила дій над ними чітко виклав італійський математик **Рафаель Бомбеллі** (бл. 1526— бл. 1573).

Міхаеля Штіфеля (19.IV.1486 — 19.IV.1567), який був священиком, часто згадують у зв'язку з його обчисленнями дня кінця світу. За розрахунками Штіфеля, це мало трапитися 19 жовтня 1533 р., про що він повідомив своїх прихожан. Чекаючи страшний день, люди занедбали господарство. Пророкування, звичайно, не збулося, і вони зажадали від пророка-невдахи відшкодування збитків. Штіфелю довелося рятуватися втечею. Він зробив правильний висновок із своєї невдачі і, залишивши числові марновірства, серйозно зайнявся математикою. Ці заняття принесли йому справжній успіх. Штіфель дав словесне формулювання формули $(a + b)^n$ для натурального показника степеня, висунув ідею логарифма числа та ідею багатовимірного узагальнення куба. Трактат ученого **«Повна арифметика»** користувався в свій час великою популярністю.

На межі епох Відродження і Нового часу височить велична постать глибокого мислителя **Франсуа Вієта** (1540 — 13.XII.1603). Учений залишив велику наукову спадщину. Алгебра в його творах стала загальною наукою **про алгебраїчні рівняння**, яка ґрунтується на **символічних позначеннях**. Він відкрив цікаві теореми про залежності між коефіцієнтами і коренями алгебраїчних рівнянь, довів ряд формул плоскої і сферичної тригонометрії, розв'язав багато складних задач.

Нідерландський інженер **Сімон Стевін** (1548—1620) у 1585 р. опублікував книгу **«Десята»**, де вперше в Європі виклав теорію десяткових дробів і десяткову систему мір. Він енергійно виступав проти різних числових марновірств, проголошуючи рівноправність усіх чисел як математичних понять: «Ми приходимо до висновку, що не існує ніяких абсурдних, незбагненних, неправильних чи глухих чисел. Серед чисел існує така досконалість і узгодженість, що нам потрібно міркувати дні і ночі над їх дивною закономірністю». Математика знаходить широке застосування в розкритті таємниць природи.

У 1543 р. вийшла праця **Міколая Коперніка «Про обертання небесних сфер»**. Математичні методи широко застосовують у живописі Леонардо да Вінчі і Альбрехт Дюрер, у фізичних дослідженнях — Галілей.

Європа Нового часу

XVII—XVIII ст. були епохою технічної і наукової революції, яка розпочалася в XVI ст. Математики Нового часу ще більшою мірою, ніж в епоху Відродження, були одночасно астрономами, фізиками, механіками, філософами. Механіка земних і небесних рухів ставила в центрі уваги вивчення залежностей між рушійними силами, прискореннями, швидкостями, траєкторіями руху.

Нові задачі вимагали створення нових математичних методів. Перевіряючи другий закон руху планет, німецький математик **Йоганн Кеплер** (27.XII. 1571 — 15.XI. 1630) розв'язав нову задачу — обчислив площу еліптичного сектора, а в 1615 р. опублікував **«Нову стереометрію винних бочок»**, у якій застосував відкритий метод обчислення геометричних величин до визначення площ поверхонь і об'ємів 80 різних тіл обертання.

Італійський математик **Бонавентура Кавальєрі** (1598—3.XII.1647) для обчислення геометричних величин розробив метод неподільних, який викликав захоплення сучасників.

Складні задачі механіки і астрономії вже не можна було розв’язувати методами математики сталих величин. У відповідь на вимоги часу французький математик і філософ **Рене Декарт** вводить у математику змінні величини. Відкриття Декарта мало величезне значення для дальшого розвитку математики та її застосувань.

Ідеї змінної величини й використання прямолінійних (декартових) координат Декарт поклав в основу нової математичної дисципліни — **аналітичної геометрії**. Співтворцем цієї математичної галузі був любитель математики, автор численних блискучих відкриттів французький юрист **П’єр Ферма** (1601 — 12.I.1665).

У XVII ст. значно розширюється діапазон математичних досліджень. Розробляються вже існуючі дисципліни, виникає цілий ряд нових розділів вищої математики.

З численних задач, над якими працювали математики XVII ст., найбільш продуктивними виявилися задачі на проведення дотичної до кривої, вимірювання довжин ліній, обчислення площ і об’ємів. Їх штурм завершився в 60—70-ті роки XVII ст. найвидатнішим відкриттям усіх часів — створенням нової математичної теорії — **диференціального** та **інтегрального числення.** Його здійснили англійський учений **Ісаак Ньютон** (4.I.1643—31.III.1727) і німецький учений **Готфрід Вільгельм Лейбніц** (1.VII. 1646—14.XI. 1716). При цьому велику роль відіграли антична спадщина і поняття змінної величини, введене в математику Декартом.

У центрі математичних досліджень **XVII ст.** став **аналіз нескінченно малих**, тобто **диференціальне та інтегральне числення**. Але одночасно створювалися і швидко розвивалися різні розділи вищої математики. Широке застосування в різних розділах математики й математичному природознавстві знаходила **аналітична геометрія**. У працях геніальних французьких вчених **Блеза Паскаля** (19.VI. 1623—19.VIII. 1662), **Христіана Гюйгенса** (14.IV.1629—8.VII.1695) і **П’єра Ферма** закладалися теоретичні основи науки про закономірності, яким підпорядковані масові випадкові події, — **теорії ймовірностей**. При цьому важливі математичні відкриття часто формувалися на основі логічного аналізу різних ігор. Роль ігор в історії математики високо оцінив Лейбніц.

Трактат Паскаля **«Дослід про конічні перерізи»** складався з 53 рядків і був виданий лише в 50 примірниках, але він містив справжню перлину математики — **знамениту теорему Паскаля**, фундаментальну залежність нової геометричної дисципліни — **проективної геометрії**.

Темпи розвитку науки швидко зростали. Мореплавство, кораблебудування, теплотехніка, гідроенергетика ставили перед наукою все складніші задачі на дослідження електромагнітних явищ і теплоти, визначення на небосхилі положення Сонця, Місяця, зірок; важливою стала проблема точного визначення часу, відображення сфери на площину.

Міцніла впевненість, що диференціальні рівняння відображають найголовніші закономірності природи і розв’язування їх є універсальним методом пізнання. В алгебрі центральною проблемою стає розв’язування алгебраїчних рівнянь і подання коренів рівнянь комбінацією радикалів.

Обчислювальні методи збагачуються логарифмами й численними таблицями. З’являються **перші обчислювальні машини** Паскаля, Лейбніца, німецького математика Шіккарда (1592—1635).

На кінець XVI ст. математика складалася з арифметики, алгебри, геометрії і тригонометрії. У XVII ст. виникають нові математичні дисципліни: аналітична геометрія, проективна геометрія, теорія ймовірностей і визначне відкриття XVII ст. — **числення нескінченно малих**, яке, в свою чергу, дало ростки новим дисциплінам — **теорії нескінченних рядів**, **інтегруванню звичайних диференціальних рівнянь** і **варіаційному численню**. Водночас продовжувалися дослідження з алгебри і тригонометрії, створювалися різні методи наближених обчислень.

Тільки протягом XVII ст. математика збагатилася більшою кількістю нових понять і методів, ніж за всі п’ятнадцять попередніх.

У XVII ст. вчені сформували припущення про те, що кожне алгебраїчне рівняння *n*-го степеня має *n* коренів, тобто **було сформульовано основну теорему алгебри**. При цьому застосовувались уже від’ємні та уявні корені алгебраїчних рівнянь.

Великий вплив на дальший розвиток математики і математичного природознавства мала розробка Рене Декартом нової математики, яку він називав загального наукою про просторові образи, їх розміщення и вимірювання.

Багато уваги приділяли вчені допоміжним засобам обчислень. Шотландський барон **Джон Непер** (1550—1617) відкрив не пізніше 1594 року логарифми, але тільки в 1614 р. опублікував свій **«Опис дивовижної таблиці логарифмів»**. Швейцарський механік і годинникар **Іобст Бюргі** (1552—1632) також відкрив логарифми. Професор одного з коледжів в Лондоні **Генрі Брігс** (1561—1631), застосувавши ідею Непера створив десяткові логарифми.

У зв’язку з необхідністю виконувати велику кількість складних обчислень було створено й інші засоби обчислень — російську рахівницю, палички Непера, логарифмічну лінійку.

Ферма вдихнув нове життя в стародавню науку про властивості чисел. Працюючи над трактатами античних авторів, насамперед «Арифметикою» Діофанта, він узагальнив багато вже відомих і поставив цілий ряд нових проблем з теорії чисел, які відкрили нову епоху в історії цієї галузі математики.

П’єр Ферма, Паскаль і Гюйгенс не тільки розв’язали складні задачі з теорії ймовірностей, а й сформували ряд важливих понять і законів про закономірності масових випадкових явищ. А швейцарський математик Яков Бернуллі сформулював одну з фундаментальних теорем теорії ймовірності — **закон великих чисел**.

І все-таки на фоні численних і безумовно важливих відкриттів учених найвизначнішим було числення нескінченно малих. Від часів Евдокса Кнідського і Архімеда видатні математики різних країн працювали над створенням ефективного методу розв’язування задач на обчислення площ і об’ємів складних фігур проведення дотичних до складних кривих ліній. Більш як на 20 ст. протяглася траса цього марафонського пошуку. Останню дистанцію її успішно пройшли **Ньютон** і **Лейбніц**. Математика сягнула висот, з яких такі генії, як Лейбніц, уже бачили контури математики наших днів.

Європа XIX-XX ст.

Звичайно, характеризуючи математику цих століть, слід насамперед спинитися на творчості **Карла Фрідріха Гаусса** (30.IV.1777—23.II.1855). Цей талановитий учений обезсмертив своє ім'я відкриттями в теорії чисел, алгебрі, геометрії, обчислювальній математиці, дав прекрасні зразки застосувань математичних методів в астрономії, механіці, геодезії, електротехніці, картографії. Одного не наважився зробити Гаусс — подолати чари евклідової геометрії. **Він стояв на порозі відкриття неевклідової геометрії**, але, дбаючи про спокійне життя, жодним словом не підтримав тих, хто відкрив деякі її таємниці. Це трагічно позначилося на долі генія російської науки **Миколи Івановича Лобачевського** (1.XII.1792—24.II.1856) і угорського математика **Яноша Бойяя** (15.XII.1802—27.I.1860).

Плеяда визначних математиків працювала у вищих навчальних закладах Франції. Вони читали лекції, писали підручники для студентів, активно шукали нові математичні залежності і можливості застосування математики в науці й техніці.

Так, **Жозеф-Луї Лагранж** зробив видатні відкриття в теорії алгебраїчних рівнянь, діофантовому аналізі, аналітичній і небесній механіці, сферичній астрономії, картографії, теорії диференціальних рівнянь. Одночасно з Ейлером він заклав основи нового розділу математичного аналізу — **варіаційного числення**.

Гаспар Монж, застосувавши геометричні методи до розв'язування задач, пов'язаних з будівництвом воєнних споруд, став творцем **нарисної геометрії**.

Різнобічною була діяльність визначного математика, астронома і механіка **П'єра-Сімона Лапласа.** Його п'ятитомна **«Небесна механіка»** містила розв'язання багатьох складних задач теоретичної астрономії і була визначним внеском в цю галузь математичного природознавства.

Сімон-Дені Пуассон — відомий вчений, член Паризької АН, почесний член Петербурзької АН, працював у різних розділах математики, небесної механіки, місячної й планетної теорій, теорії капілярності, згинання пластинок, теплопровідності, збагатив науку математичними моделями явищ навколишньої дійсності.

Надзвичайно плідною була творчість **Огюстена-Луї Коші**. Йому належить понад 800 праць з математичного аналізу, математичної фізики, теорії чисел, алгебри, теоретичної і небесної механіки. У своїх працях Коші підняв на вищий рівень строгість математичних доведень. Він дав загальновизнане обґрунтування математичного аналізу, виклавши його на основі послідовного застосування теорії границь.

У 20-ті роки XIX ст. на короткий час засяяв геній норвезького математика **Нільса Генріха Абеля**. Незважаючи на своє нужденне життя і важку хворобу, Абель здійснив справжній науковий подвиг — збагатив різні розділи математики доведенням багатьох важливих теорем, зокрема, знаменитої теореми про те, що **в загальному випадку алгебраїчне рівняння *n*-го степеня з довільними буквеними коефіцієнтами при *n* ≥ *5* нерозв'язне в радикалах**. Іменем Абеля названі теореми, формули, перетворення, ознаки та інші математичні об'єкти.

На початку 30-х років на горизонті французької науки, як наднова зірка, засяяв геній **Еваріста Галуа** (25.X.1811—31.V.1832). Дві пристрасті володіли Галуа — ненависть до королів і відданість математиці. У науці він теж був революціонером. У ніч перед дуеллю, підстроєною його політичними противниками, в листі до товариша Галуа виклав основи однієї з найважливіших галузей сучасної математики — **теорії груп**. Завдяки дальшим дослідженням в цій теорії остаточно було розв'язано **питання про квадратуру круга**, **подвоєння куба** і **трисекцію кута**, стали зрозумілими й численні загадкові явища, пов'язані з поданням у радикалах розв'язків алгебраїчних рівнянь.

23 лютого 1826 року професор Казанського університету **Микола Іванович Лобачевський** на засіданні фізико-математичного факультету зробив доповідь **«Стислий виклад основ геометрії із строгим доведенням теореми про паралельні лінії»**. Не одне покоління вчених безуспішно намагалося розгадати таємницю постулату про паралельні прямі. Гаусс бачив шлях до розгадки великої таємниці, але не наважився похитнути авторитет евклідової традиції. Цей революційний крок в історії всього математичного і філософського мислення зробив геній Лобачевський.

Дальший крок у розвитку геометрії належить видатному німецькому математику **Бернхарду Ріману** (17.IX.1826—30.XII.1866). Він класифікував усі існуючі геометрії, включаючи й ще мало зрозумілу тоді **геометрію Лобачевського**, і вказав шлях до створення будь-якої кількості нових видів математичних моделей фізичного простору. З часом такі простори було введено в геометрію і математичне природознавство, що істотно вплинуло на дальший розвиток всієї науки. Найбільший вплив в історії математики мала **теорія множин**, створена **Георгом Кантором** (3.III.1845-6.I.1918).

Математика XX ст. поповнилася величезною кількістю теорій, предметом вивчення яких є абстрактні об'єкти. Проте, незважаючи на зрослий рівень абстракції сучасної математики, слід завжди пам’ятати, що витоками й корінням її була об’єктивна реальність. Яскравим свідченням цього є виникнення в 40-х роках XX століття нової математичної теорії — кібернетики, матеріальним втіленням якої стали **електронні обчислювальні машини (ЕОМ)**.