Розділи математики: коротка історична довідка

Джерело: А.Г.Цыпкин. Справочник по математике
для средних учебных заведений (1983)

Комп'ютерна верстка: Виспянський Ігор

Дата публікації: 6 вересня 2008

Зміст

1. Теорія множин

Теорія множин — це розділ математики, що вивчає загальні властивості множин (переважно нескінченних). Виокремлення теорії множин в самостійний розділ математики сталося порівняно недавно — **на рубежі XIX і XX століть**. Теорія множин зробила великий вплив на розвиток сучасної математики — вона стала фундаментом ряду нових розділів математики, дозволила по-новому поглянути на класичні розділи математики і глибше зрозуміти сам предмет математики.

2. Дійсні числа

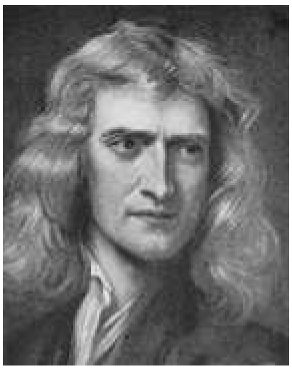
Число — це найважливіше математичне поняття. **Натуральні числа**, які використовують для рахунку в практичній діяльності, з'явилися на ранніх етапах розвитку людської цивілізації. Первинне поняття числа, як чогось окремого, відсутнє — число було «прив'язане» до тих предметів, які перераховували, і в мові первісних народів існували різні словесні звороти для позначення одного і того ж числа різних предметів. Поняття натурального числа, не пов'язаного з перерахунком конкретних предметів, з'являється і закріплюється разом з розвитком писемності і введенням для позначення чисел певних символів.

Поява **дробових** (позитивних раціональних) **чисел** була пов’язана з необхідністю проводити виміри, тобто процедуру, в якій яка-небудь величина порівнюється з іншою величиною того ж роду, яка бралась за **еталон** (одиницю виміру). Але оскільки одиниця виміру не завжди вкладалася ціле число разів у вимірюваній величині, і нехтувати цією обставиною у ряді випадків було не можна, то виникла практична потреба ввести «дрібніші» числа, ніж натуральні. Це і було джерелом виникнення найбільш «простих» дробів, таких, як **половина**, **третина**, **чверть** і так далі. Подальший розвиток поняття числа був обумовлений вже не лише безпосередньою практичною діяльністю людини, але й став наслідком розвитку математики.

Введення **від’ємних чисел** було викликане розвитком алгебри як науки, що дає загальні способи вирішення арифметичних завдань незалежно від їх конкретного вмісту і вихідних числових даних. Від’ємні числа систематично використовувалися індійськими математиками ще в **VI—XI століттях**. В європейській науці від’ємні числа остаточно увійшли до вжитку лише після робіт **Р. Декарта** в **XVII столітті**, що дав їх геометричне тлумачення.

Множина раціональних чисел виявляється достатньою для задоволення більшості практичних потреб — за допомогою раціональних чисел вимірювання можна виконувати з будь-яким наперед заданою степенем точності.

Подальше розширення поняття числа сталося в **XVII столітті** в період зародження сучасної математики, коли виникла необхідність ввести чітке визначення поняття числа. Таке визначення було дане одним з основоположників математичного аналізу **І. Ньютоном** в **«Загальній арифметиці»**: «Під числом ми розуміємо не стільки множину одиниць, скільки відношення якої-небудь величини до іншої величини того ж роду, прийнятої нами за одиницю». Це формулювання дає єдине визначення дійсного числа, як раціонального, так і ірраціонального.



Мал. 1. Ісаак Ньютон.

Надалі, в **70-х роках XIX століття строга теорія дійсного** числа була розвинена в роботах **Р. Дедекінда**, **Г. Кантора** і **К. Вейерштраса**.

3. Комплексні числа

Історично введення комплексних чисел виявилося пов’язаним із отриманням формули обчислення коренів кубічного рівняння:

$$x^3 = px + q. \qquad (1)$$

В первой трети XVI века итальянский математик Н. Тарталья показал, что корень этого уравнения всегда представляется выражением

У **першій третині XVI століття** італійський математик **Н. Тарталья** показав, що корінь цього рівняння завжди представляється виразом

$$x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}, \qquad (2)$$

де u і v — розв'язки системи рівнянь

$$u + v = q, uv = \left(\frac{p}{3}\right)^3 \qquad (3)$$

Так, наприклад, щоб знайти корінь кубічного рівняння

$$x^3 = 9x + 28,$$

необхідно скласти систему (3) для даного рівняння, порахувавши яку, отримаємо:

$$u = 27, v = 1 \text{ і}$$

$$u = 1, v = 27.$$

Використовуючи співвідношення (2), знаходимо, що $x = 4$, тобто число 4 є коренем даного рівняння.

Проте виявилось, що існують кубічні рівняння, для яких система (3) не має рішень в множині дійсний чисел, тоді як кубічне рівняння напевне (точно) має дійсний корінь. Наприклад, рівняння

$$x^3 = 15x + 4$$

має дійсний корінь $x = 4$, в чому легко переконатися, підставивши в дане рівняння замість x число 4. Якщо ж для даного рівняння написати систему (3), то виявиться, що ця система не матиме рішень в множині дійсних чисел.

Це незрозуміле тоді явище вперше пояснив італійський математик **Р. Бомбеллі** в **1572 р.** і його пояснення, по суті, було засновано на **введенні поняття комплексного числа** і **правил дій над комплексними числами**. Проте аж до XIX століття, не дивлячись на те, що апарат комплексні чисел дозволив отримати багато важливих фактів, що відносяться також і до дійсних чисел, само існування комплексних чисел багатьом математикам здавалося вельми сумнівним. Лише у **XIX** столітті після появи робіт **К. Гауса**, в яких давалося наочне **геометричне зображення комплексних чисел** (як точок або векторів на площині), існування комплексних чисел стало загальновизнаним фактом.

Згадаємо ще один факт, який також приводить до думки про необхідність розширення множини дійсних чисел до множини комплексних чисел.

Як відомо, натуральний степінь будь-якого дійсного числа знову буде дійсним числом. Проте операція отримання кореня (зворотна операції піднесення до степеня) не завжди здійснима в множині дійсних чисел: не існує дійсного числа a, парна міра якого була б від’ємним числом. Іншими словами, в множині дійсних чисел не існує числа, яке було б коренем рівняння

$$x^n = b,$$

де n — парне число, а b — від’ємне дійсне число.

Слідуючи загальному плану розширення числових областей, як це вже неодноразово робилося (наприклад, при введенні понять від’ємних чисел і раціональних чисел), множину дійсних чисел можна розширити до множини чисел, яка буде замкнута відносно операції отримання кореня. Забігаючи вперед, відмітимо, що при цьому виходить істотно новий результат і для тих випадків, коли операція отримання кореня здійснима в множині дійсних чисел.

Один із способів побудови множини комплексних чисел полягає в тому, що, множина дійсних чисел розширюється шляхом приєднання до множини дійсних чисел нового числового об’єкту — кореня рівняння

$$x^2 + 1 = 0.$$

Отримана «розширена» множина називається **множиною комплексних чисел**.

4. Алгебра

Термін **«алгебра»** походить від назви твору **Мухамеда аль-Хорезмі «Альджебр аль-мукабала»** (**IX** століття), що містить загальні методи розв’язку задач, які зводяться до рівнянь 1-го і 2-го степеня.

До **середини XVII століття** в основному склалася **сучасна символіка алгебри**. Аж до XVIII століття під алгеброю розумілася наука про буквені обчислення — тотожні перетворення буквених формул, вирішення рівнянь першого — четвертого степеня, логарифми, прогресії, комбінаторика. В даний час всі ці розділи алгебри прийнято називати елементарною алгеброю.

У **XVIII—XIX століттях** предмет алгебри — це перш за все вивчення многочленів, теорія рівнянь алгебри з одним невідомим, теорія систем лінійних рівнянь з декількома невідомими, а також теорія матриць і визначників.

Третій (сучасний) етап розвитку алгебри як науки про алгебраїчні операції почався в **середині XIX століття** і був пов’язаний з появою всіляких прикладів алгебраїчних операцій над об’єктами зовсім іншої природи, ніж дійсні числа. Першими такими прикладами стали множення підстановок і операції над комплексними числами.

5. Геометрія

Виникнення геометрії бере свій початок з давніх часів та було обумовлено практичними потребами людської діяльності (необхідністю вимірювати земельні ділянки, вимірювати об’єми різних тіл і т. д.).

Найпростіші геометричні відомості та поняття були доступні ще в **Давньому Єгипті**. У цей період геометричні твердження формулювалися у вигляді правил, що даються без доказів.

З **VII століття до н.е. по I століття н.е.** геометрія як наука бурхливо розвивалася в **Древній Греції**. У цей період відбувалося не лише накопичення різних геометричних відомостей, але й відпрацьовувалася методика доказів геометричних тверджень, а також робилися перші спроби сформулювати основні первинні положення (аксіоми) геометрії, з якої чисто логічними міркуваннями виводиться безліч різних геометричних тверджень.

Рівень розвитку геометрії в Древній Греції можна зрозуміти з праці **Евкліда «Початки»**. У цій книзі вперше була зроблена спроба дати систематичну побудову планіметрії на базі основних невизначуваних геометричних понять і аксіом (постулатів). Особливе місце в історії математики займає **п'ятий постулат Евкліда** (аксіома про паралельні прямі).

Мал. 2. Евклід.

Довгий час математики безуспішно намагалися вивести п'ятий постулат з останніх постулатів Евкліда і лише в **середині XIX століття** завдяки дослідженням **Й. І. Лобачевского**, **Б. Рімана** і **Я. Бойяї** стало ясно, що п'ятий постулат не може бути виведений з останніх, а **система аксіом, запропонована Евклідом, не єдино можлива**.

Мал. 3. Й. І. Лобачевский.

«Початки» Евкліда зробили **величезний вплив** на розвиток математики. Ця книга впродовж **більш ніж двох тисяч років** була не лише підручником по геометрії, але і служила відправним пунктом для багатьох математичних досліджень, в результаті яких виникли нові самостійні розділи математики.

Систематична побудова геометрії зазвичай відбувається за наступною схемою:

1. Перераховуються основні геометричні поняття, які вводяться без означення.

2. Дається формулювання аксіом геометрії.

3. На основі аксіом і основних геометричних понять формулюються інші геометричні поняття і теореми.

6. Тригонометрія

Тригонометрія виникла як апарат для обчислення невідомих параметрів трикутника по заданих значеннях інших його параметрів. Так, методами тригонометрії по даних сторонах трикутника можна обчислити його кути, за відомою площею і двома кутами обчислити сторони і т. д.

Необхідність відшукувати невідомі параметри даного трикутника **вперше виникла в астрономії**, і протягом довгого часу тригонометрія була одним з розділів астрономії.

Перші методи знаходження невідомих параметрів даного трикутника були розвинені **вченими Древній Греції** за **декілька століть до нової ери**.

Грецькі астрономи не розглядали синусів, косинусів і тангенсів. Замість таблиць цих величин вони склали і використовували таблиці, що дозволяють відшукувати хорду кола по стягуваній нею дузі.

Подальший розвиток тригонометрія отримала в **середні віки** в **роботах індійських** і **арабських учених**.

Сучасні буквені позначення з'явилися в тригонометрії в **середині XVIII століття**. Приблизно в той же час в тригонометрії стали розглядатися радіанні міри кутів, були введені тригонометричні і зворотні тригонометричні функції числового аргументу, після чого тригонометрія набула свого сучасного вигляду.

7. Метод координат

Поняття **прямокутної системи координат** на площині вперше **з'явилося** в геометрії ще **до початку нашої ери**. З її допомогою математик Александрійської школи **Аполоній** визначав і вивчав криві другого порядку — еліпс, гіперболу і параболу.

У **XVIII столітті** французький філософ і математик **Рене Декарт** (і одночасно з ним **П. Ферма**) ввів правило вибору знаків в прямокутній системі координат і **заклав основи аналітичної геометрії** на площині — розділу математики, що встановлює зв'язок між алгеброю і геометрією.

Мал. 4. Рене Декарт.

Роботи Декарта були підготовлені роботами його співвітчизника **Ф. Вієта**, який **вперше ввів в алгебру буквені позначення** (як відомих, так і невідомих величин).

Аналітична геометрія зіграла важливу роль в розвитку поняття числа: завдяки правилу вибору знаків координат від’ємні числа, які не визнавали більшість математиків середньовіччя, отримали наочне зображення і остаточно затвердилися в математиці.

У подальшому використання прямокутної декартової системи координат зіграло вирішальну роль при твердженні в математиці комплексних чисел.

8. Теорія границь

Інтуїтивне поняття про **границі** використовувалося ще **вченими Древній Греції** при обчисленні площ і об’ємів різних геометричних фігур. Методи рішення таких завдань в основному були розвинені **Архімедом**.

При створенні диференціального і інтегрального числень **математики XVII століття** (і, перш за все, **І. Ньютон**) також явно або неявно використовували поняття граничного переходу.

Вперше визначення **поняття границі** було **введене** в роботі **Дж. Валліса** «Арифметика безкінечних величин» (**XVII століття**), проте історично це поняття не лежало в основі диференціального і інтегрального числень.

Лише у **XIX столітті** в роботах **О. Коші** теорія границь була використана для строгого обґрунтування математичного аналізу. Подальшою розробкою теорії границь займалися **К. Вейєрштрасс** і **Б. Больцано**.

За допомогою теорії границь в **другій половині XIX століття** було, зокрема, обґрунтовано використання в аналізі безкінечних рядів, які стали зручним апаратом для побудови нових функцій.

9. Диференціальне та інтегральне числень

Математичний аналіз як розділ математики виник в результаті об’єднання двох різних і спочатку не зв’язаних напрямів математичних досліджень — **диференціального** і **інтегрального числень**.

Первинне інтуїтивне **уявлення про** математичний об’єкт, який ми зараз називаємо **визначеним інтегралом**, зустрічалося **в роботах учених Древньої Греції**. Так, Архімед для обчислення об’ємів і площ поверхонь тіл користувався розбиттям фігур на, елементи з подальшим підсумовуванням цих елементів, передбачаючи тим самим поняття інтегральних сум.

Аналогічними задачами, розвиваючи метод Архімеда, займалися **Кеплер**, **Паскаль**, **Ферма** та інші вчені. Ферма також займався задачами, які ми зараз відносимо до диференціального числення, — проведенням дотичних до кривих, **знаходженням найбільшого** і **найменшого значень функцій**, тощо, причому для вирішення цих завдань він, по суті, користувався **поняттям приросту функції**.

Зв’язок між цими різними класами задач була усвідомлена вченими після **досліджень Ньютона** і **Лейбніца**. Лейбніцом і були введені **позначення інтеграла** і **диференціала**, які використовуються в даний час.

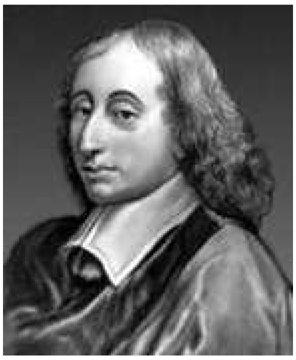
Строге обґрунтування більшості понять математичного аналізу було дане **Коші в середині XIX століття** на основі теорії границь.

Подальший розвиток математичного аналізу привів до виділення таких самостійних розділів математики, як теорія звичайних диференціальних рівнянь, теорія диференціальних рівнянь часткових похідних, теорія інтегральних рівнянь, теорія функцій комплексної змінної, теорія функцій дійсної змінної, функціонального аналізу і т. д.

10. Комбінаторика. Теорія ймовірностей

Комбінаторика — розділ математики про вибір і розташування елементів деякої множини на основі яких-небудь умов.

Комбінаторика почала виділятися в окремий розділ математики в роботах **Б. Паскаля** і **П. Ферма**, хоча окремі поняття і факти комбінаторики були відомі ще математикам античності і середньовіччя.



Мал. 5. Б. Паскаль.

Великий внесок у розвиток комбінаторики внесли **Г. Лейбніц**, **Я. Бернуллі** і **Л. Ейлер**. В їх роботах були дані визначення основних понять комбінаторики, розвинені перші комбінаторні методи і вказані їх застосування, а також помітний зв’язок комбінаторики з обчисленням ймовірностей. Саме **комбінаторика** послужила фундаментальною **основою початкам теорії ймовірностей**.

Теорія ймовірностей — розділ математики, присвячений вивченню ймовірності, — міра можливості настання якої-небудь певної події в тих або інших певних умовах, які можуть повторюватися скільки завгодно велике число разів.

Теорія ймовірностей дозволяє по ймовірності настання одних випадкових подій знаходити ймовірність настання інших випадкових подій, яким-небудь чином пов’язаних з першими.