Прогрессии и последовательности

Числовая последовательность — это занумерованное множество чисел, расположенных в порядке возрастания номеров.

Последовательность

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

считается **заданной**, если известно правило, по которому можно определить любой ее член

$$a_n, n \in N.$$

Арифметической прогрессией называется такая последовательность, у которой каждый ее член, начиная со второго, равен предшествующему члену, сложенному с одним и тем же числом d, которое называется **разностью прогрессии**.

Геометрической прогрессией называется такая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q, называемое **знаменателем прогрессии** ($q \neq 0$).

Арифметическая прогрессия

Пример 1.

В прогрессии $12,\ 15,\ 18,\ 21,\ 24, \dots$ десятый член равен

$$a_{10} = 12 + 3 \cdot 9 = 39.$$

Сумма десяти первых членов равна

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{(12 + 39) \cdot 10}{2} = 255.$$

Пример 2.

Сумма всех целых чисел от 1 до 100 включительно равна

$$\frac{(1+100)\cdot 100}{2}=5050.$$

Пример 3.

Доказать, что последовательность, заданная формулой n–го члена $a_n=5-2n$, является арифметической прогрессией.

Решение.

Составим разность

$$a_{n+1}-a_n=\big(5-2(n+1)\big)-(5-2n)=5-2n-2-5+2n=-2=d.$$

Эта разность не зависит от номера $n\geq 1$; следовательно, (a_n) по определению является арифметической прогрессией; при этом ее первый член $a_1=3$ и разность $d=-2$.

Пример 4.

Найти сумму всех двузначных натуральных чисел.

Решение.

Числа $10; 11; 12; \dots; 98; 99$ образуют арифметическую прогрессию; при этом $a_1=10$, $a_n=99$, $d=1$. Тогда $a_n=a_1+d(n-1)$, т.е. $99=10+n-1$, или $n=90$.

$$S=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{10+99}{2}\cdot 90=4905.$$

Ответ: 4905.

Геометрическая прогрессия

Пример 5.

Числа $5,\ 10,\ 20,\ 40,\dots$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2.

Пример 6.

В геометрической прогрессии $5,\ 10,\ 20,\ 40, \ldots$ десятый член

$$a_{10} = 5 \cdot 2^9 = 5 \cdot 512 = 2560.$$

Сумма десяти первых членов

$$S_{10} = \frac{a_{10} \cdot q - a_1}{q - 1} = \frac{2560 \cdot 2 - 5}{2 - 1} = 5115.$$

Пример 7.

Найти a_1 и q бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $S = 9$, а сумма квадратов ее членов равна $40{,}5$.

Решение.

Рассмотрим сумму квадратов

$$a_1^2 + a_1^2\, q^2 + a_1^2\, q^4 + \cdots$$

Очевидно, это сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой первый член a_1^2, а знаменатель q^2. Получим

$$\begin{cases} \dfrac{a_1^2}{1 - q^2} = 40{,}5 \\ \dfrac{a_1}{1 - q} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 9(1 - q) \\ a_1^2 = 40{,}5(1 - q^2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 9(1 - q) \\ 81(1 - q)^2 = 40{,}5(1 - q^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 9(1 - q) \\ \left[\begin{array}{l} q = 1 \\ q = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases}$$

Значение $q = 1$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $q = \frac{1}{3}$; $a_1 = 6$.

Литература

- Элементарная математика. Решение задач. В.М. Алексеев. Киев «Вища школа» 1984.
- Справочник по элементарной математике. М.Я. Выгодский. Москва «Наука» 1986.
- Математика для подготовительных курсов техникумов. Г.И. Богатырев. Москва «Наука» 1988.