

## Алгебра

### Квадратные уравнения

1.  $x^2 + px + q = 0$ ;  $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ .

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (a \neq 0).$$

$$ax^2 + 2kx + c = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a} \quad (a \neq 0).$$

2. Формулы Виета:

$$x_1 + x_2 = -p = -\frac{b}{a}; \quad x_1 x_2 = q = \frac{c}{a}.$$

3.  $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ ;

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

### Прогрессии

#### а) Арифметическая прогрессия.

1. Общий член арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

2. Сумма  $n$  членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)n = \left(\frac{2a_1 + (n - 1)d}{2}\right)n;$$

где  $d$  – разность.

#### б) Геометрическая прогрессия.

1. Общий член геометрической прогрессии:

$$u_n = u_1 q^{n-1}.$$

2. Сумма  $n$  членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{u_1 - u_n q}{1 - q} = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = u_1 \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

где  $q$  – знаменатель прогрессии ( $q \neq 1$ ).

3. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S = \frac{u_1}{1-q}.$$

## Логарифмы

1. Запись  $\log_a N = x$  равносильна записи  $a^x = N$  ( $a > 0, a \neq 1, N > 0$ ), так что  $a^{\log_a N} = N$ .
2.  $\log_a 1 = 0$ .
3.  $\log_a a = 1$ .
4.  $\log_a (N \cdot M) = \log_a N + \log_a M$ .
5.  $\log_a \frac{N}{M} = \log_a N - \log_a M$ .
6.  $\log_a N^n = n \log_a N$ .
7.  $\log_a \sqrt[n]{N} = \frac{1}{n} \log_a N$ .
8.  $\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$ .

## Геометрия

### Планиметрия

Площадь треугольника

$$\begin{aligned} S &= \frac{ah}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp = \frac{bc \sin A}{2} = \\ &= \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = p^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}, \end{aligned}$$

где  $p$  – полупериметр,  $h$  – высота,  $r$  – радиус вписанной окружности.

Площадь параллелограмма

$$S = ah,$$

где  $a$  – сторона параллелограмма,  $h$  – его высота, опущенная на сторону  $a$ .

Площадь прямоугольника

$$S = ab,$$

где  $a$  и  $b$  – стороны прямоугольника.

Площадь квадрата

$$S = a^2,$$

где  $a$  — сторона квадрата.

Площадь ромба

$$S = ah = \frac{d_1 d_2}{2},$$

где  $d_1$  и  $d_2$  — диагонали ромба.

Площадь трапеции

$$S = \frac{(a + b)h}{2},$$

где  $a$  и  $b$  — основания,  $h$  — высота трапеции.

Площадь правильного многоугольника

$$S = pk,$$

где  $p$  — полупериметр,  $k$  — апофема.

Длина окружности

$$C = 2\pi R.$$

Длина дуги (в  $n^\circ$ )

$$l = \frac{2\pi R n^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ}.$$

Площадь круга

$$S = \pi R^2.$$

Площадь сектора

$$S = \frac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ} \cdot \frac{R}{2} = \frac{lR}{2},$$

где  $l$  — длина дуги сектора.

Радиус вписанной в треугольник окружности

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

где  $a, b, c$  — стороны треугольника, а  $p = \frac{a+b+c}{2}$ .

Радиус описанной окружности

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

## Стереометрия

Боковая поверхность призмы

$$S_6 = pl,$$

где  $p$  — периметр перпендикулярного сечения,  $l$  — длина ребра.

Боковая поверхность правильной пирамиды

$$S_6 = pk,$$

где  $p$  — полупериметр основания,  $k$  — апофема.

Боковая поверхность правильной усеченной пирамиды

$$S_6 = \frac{(P_1 + P_2)k}{2},$$

где  $P_1, P_2$  — периметры соответственно верхнего и нижнего оснований,  $k$  — апофема.

Боковая поверхность круглого цилиндра

$$S_6 = 2\pi Rh.$$

Боковая поверхность конуса

$$S_6 = \pi Rl,$$

где  $l$  — образующая.

Боковая поверхность усеченного конуса

$$S_6 = \pi l(R + r),$$

где  $l$  — образующая,  $R$  и  $r$  — радиусы оснований.

Поверхность шара

$$S = 4\pi R^2,$$

где  $R$  — радиус шара.

Объем призмы

$$V = Sh,$$

где  $S$  — площадь основания,  $h$  — высота.

Объем куба

$$V = a^3,$$

где  $a$  — ребро куба.

Объем пирамиды

$$V = \frac{Sh}{3},$$

где  $S$  — площадь основания,  $h$  — высота пирамиды.

Объем усеченной пирамиды

$$V = \frac{h}{3}(S + s + \sqrt{Ss}),$$

где  $S$  и  $s$  — соответственно площади нижнего и верхнего оснований,  $h$  — высота.

Объем цилиндра

$$V = \pi R^2 h.$$

Объем конуса

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

Объем усеченного конуса

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$

Объем шара

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Объем сферического сектора

$$V = \frac{SR}{3} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

где  $S$  — поверхность сегмента,  $R$  — радиус шара,  $h$  — высота сегмента, который является основанием сектора.

Объем сферического сегмента

$$V = \frac{1}{6}\pi h(3r^2 + h^2) = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h),$$

где  $R$  — радиус шара,  $h$  — высота сегмента,  $r$  — радиус основания сегмента.

## Тригонометрия

### Таблица знаков и некоторых значений тригонометрических функций

| Название функции            | Четверти |    |     |    | I        |                      |                      |                      |          | II       | III      | IV       |
|-----------------------------|----------|----|-----|----|----------|----------------------|----------------------|----------------------|----------|----------|----------|----------|
|                             | I        | II | III | IV | 0°       | 30°                  | 45°                  | 60°                  | 90°      | 180°     | 270°     | 360°     |
| $\sin \alpha$               | +        | +  | -   | -  | 0        | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1        | 0        | -1       | 0        |
| $\cos \alpha$               | +        | -  | -   | +  | 1        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0        | -1       | 0        | 1        |
| $\operatorname{tg} \alpha$  | +        | -  | +   | -  | 0        | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | $\infty$ | 0        | $\infty$ | 0        |
| $\operatorname{ctg} \alpha$ | +        | -  | +   | -  | $\infty$ | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0        | $\infty$ | 0        | $\infty$ |

### Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$
- $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$
- $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$
- $\sin \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = 1.$
- $\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1.$
- $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$
- $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha.$
- $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha.$

### Таблица формул приведения

| Угол<br>Функция      | $-\alpha$                    | $90^\circ \mp \alpha$           | $180^\circ \mp \alpha$          | $270^\circ \mp \alpha$          | $360^\circ k \mp \alpha$        |
|----------------------|------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| $\sin$               | $-\sin \alpha$               | $+\cos \alpha$                  | $\pm \sin \alpha$               | $-\cos \alpha$                  | $\mp \sin \alpha$               |
| $\cos$               | $+\cos \alpha$               | $\pm \sin \alpha$               | $-\cos \alpha$                  | $\mp \sin \alpha$               | $+\cos \alpha$                  |
| $\operatorname{tg}$  | $-\operatorname{tg} \alpha$  | $\pm \operatorname{ctg} \alpha$ | $\mp \operatorname{tg} \alpha$  | $\pm \operatorname{ctg} \alpha$ | $\mp \operatorname{tg} \alpha$  |
| $\operatorname{ctg}$ | $-\operatorname{ctg} \alpha$ | $\pm \operatorname{tg} \alpha$  | $\mp \operatorname{ctg} \alpha$ | $\pm \operatorname{tg} \alpha$  | $\mp \operatorname{ctg} \alpha$ |

**Преобразования тригонометрических выражений**

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta;$   
 $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$   
 $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$
- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$   
 $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1;$   
 $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$
- $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}};$   
 $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}};$   
 $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha};$
- $\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$   
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$
- $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$
- $\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2};$   
 $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$   
 $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$   
 $\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}; \quad \operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}.$
- $\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m - n)x + \cos(m + n)x];$   
 $\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m - n)x - \cos(m + n)x];$

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x].$$

### Обратные тригонометрические функции

1.  $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}, \quad \sin(\arcsin x) = x.$
2.  $0 \leq \arccos x \leq \pi, \quad \cos(\arccos x) = x.$
3.  $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x.$
4.  $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi, \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x.$

### Простейшие тригонометрические уравнения

1.  $\sin x = a, \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n.$
  2.  $\cos x = a, \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n.$
  3.  $\operatorname{tg} x = a, \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n.$
  4.  $\operatorname{ctg} x = a, \quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n.$
- $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$