Показательные и логарифмические уравнения

Логарифмом положительного числа y при основании a $(a > 0, a \neq 1)$ называется показатель степени x, в которую нужно возвести a, чтобы получить y

$$\left(\log_a y = x\right) \Leftrightarrow (a^x = y).$$

Пример 1.

Упростить

$$\sqrt{\sqrt[\log_6 5]{25} + \sqrt[\log_8 7]{49}}.$$

Решение.

Преобразуем первое слагаемое под радикалом:

$$\sqrt[\log_6 5]{25} = 25^{\frac{1}{\log_6 5}} = 25^{\log_5 6} = 25^{\log_{25} 36} = 36.$$

Аналогичным образом преобразуем второе слагаемое под радикалом

$$\sqrt[\log_8 7]{49} = 49^{\frac{1}{\log_8 7}} = 49^{\log_7 8} = 49^{\log_{49} 64} = 64.$$

Окончательно имеем $\sqrt{36 + 64} = 10$.

Ответ: 10.

Пример 2.

Доказать, что

$$3^{\log_3^2 x} = x^{\log_3 x},$$

если $x > 0$.

Решение.

Преобразуем левую часть равенства

$$3^{(\log_3 x)^2} = \left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x}.$$

Так как $3^{\log_3 x} = x$,то имеем $\left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} = x^{\log_3 x}$, что и требовалось доказать.

Пример 3.

Вычислить без таблиц

$$x = 10^{1-\log_{100} 4} + 7^{2-\log_{49} 100}.$$

Решение.

$$x = \frac{10}{10^{\log_{100} 4}} + \frac{7^2}{7^{\log_{49} 100}} = \frac{10}{10^{\log_{10} 2}} + \frac{49}{7^{\log_7 10}} = \frac{10}{2} + \frac{49}{10} = 9{,}9.$$

Ответ: $x = 9{,}9$.

Пример 4.

Доказать, что

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a},$$

где $a,\ b,\ c$ — положительные числа, $c \neq 1$.

Решение.

Рассмотрим равносильные равенства

$$(\log_c b \log_c a = \log_c a \log_c b) \Leftrightarrow \left(\log_c\left(a^{\log_c b}\right) = \log_c\left(b^{\log_c a}\right)\right) \Leftrightarrow \left(a^{\log_c b} = b^{\log_c a}\right).$$

Пример 5.

Решить уравнение

$$\sqrt[4]{(x-3)^{x+1}} = \sqrt[3]{(x-3)^{x-2}}.$$

Решение.

Выполняя преобразования, имеем

$$(x-3)^{\frac{x+1}{4}} = (x-3)^{\frac{x-2}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{x-2}{3} \\ x-3=1 \\ x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=11 \\ x=4 \\ x=3 \end{array}\right. .$$

Ответ: $x \in \{3; 4; 11\}$.

Пример 6.

Решить уравнение

$$9^{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)} = 5^{\log_{\frac{1}{5}}(2x^2+1)}.$$

Решение.

Преобразуем обе части уравнения:

$$\left(9^{\log_{3^{-1}}(x+1)} = 5^{\log_{5^{-1}}(2x^2+1)}\right) \Leftrightarrow \left(9^{\log_9(x+1)^{-2}} = 5^{\log_5(2x^2+1)^{-1}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left((x+1)^{-2} = \left(2x^2+1\right)^{-1}\right) \Leftrightarrow \left((x+1)^2 = 2x^2+1\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. .$$

Ответ: $x \in \{0; 2\}$.

Пример 7.

Решить уравнение

$$\lg^2 x^3 - 20\lg\sqrt{x} + 1 = 0.$$

Решение.

Сделаем преобразование $\lg^2 x^3 = (3\lg x)^2$, тогда

$$\left(9(\lg x)^2-10\lg x+1=0\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\lg x=y\\ 9y^2-10y+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lg x=y\\ \left[\begin{array}{l}y=1\\ y=\dfrac{1}{9}\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=10\\ x=\sqrt[9]{10}\end{array}\right..$$

Ответ: $x\in\left\{10;\sqrt[9]{10}\right\}$.

Пример 8.

Решить уравнение

$$33\cdot 2^{x-1}-4^{x+1}=2.$$

Решение.

Выполним преобразования

$$\left(33\cdot\frac{2^x}{2}-4^x\cdot 4=2\right)\Leftrightarrow\begin{cases}2^x=y\\ \dfrac{33}{2}y-4y^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^x=y\\ \left[\begin{array}{l}y=4\\ y=\dfrac{1}{8}\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-3\end{array}\right..$$

Ответ: $x\in\{-3;2\}$.

Пример 9.

Решить уравнение

$$3\cdot 4^x+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=6\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}.$$

Решение.

Выполним преобразования

$$\left(3\cdot 4^x-6\cdot 4^x\cdot 4=-\frac{1}{3}\cdot 9^x\cdot 9^2-\frac{1}{2}\cdot 9^x\cdot 9\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(4^x(3-24)=9^x\left(-27-\frac{9}{2}\right)\right)\Leftrightarrow\left(4^x\cdot 21=9^x\cdot\frac{63}{2}\right)\Leftrightarrow\left(4^x=9^x\cdot\frac{3}{2}\right).$$

Разделив обе части уравнения на 9^x, получим

$$\left(\frac{4^x}{9^x}=\frac{3}{2}\right)\Leftrightarrow\left(\left(\frac{4}{9}\right)^x=\frac{3}{2}\right)\Leftrightarrow\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right)\Rightarrow(2x=-1)\Leftrightarrow\left(x=-\frac{1}{2}\right).$$

Ответ: $x\in\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Литература

- Элементарная математика. Решение задач. В.М. Алексеев. Киев «Вища школа» 1984.