Системы уравнений

Пусть задано несколько уравнений с одним, двумя, тремя или большим числом неизвестных.

Совокупность этих уравнений называют **системой уравнений**. Решение системы — число, пара чисел, тройка чисел и т.д., являющихся решением всех данных уравнений этой системы.

Две системы уравнений называются **равносильными**, если любое решение одной системы является решением другой, и наоборот. Если обе системы уравнений не имеют решений, то они также считаются равносильными.

Если система не имеет решений, то говорят, что она противоречивая или несовместная. Решить систему — это значит найти множество всех ее решений.

Пример 1.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 5y = 15 \\ 3x + 8y = -1 \end{cases}.$$

Решение.

Решим систему способом подстановки.

1) Из первого уравнения находим

$$y = \frac{15 - 2x}{5};$$

2) подставим выражение для y во второе уравнение системы

$$3x + \frac{8}{5}(15 - 2x) = -1;$$

3) решаем это уравнение:

$$15x + 120 - 16x = -5,$$

$$x = 125;$$

4) подставляя $x = 125$ в выражение для y, получаем

$$y = \frac{15 - 2 \cdot 125}{5} = -47.$$

Ответ: $x = 125$, $y = -47$.

Пример 2.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 5y = 15 \\ 4x + 3y = -5 \end{cases}.$$

Решение.

Решим способом алгебраического сложения систему уравнений.

1) Оставляя второе уравнение без изменения, умножим обе части первого уравнения на 2:

$$\begin{cases} 4x + 10y = 30 \\ 4x + 3y = -5 \end{cases}.$$

2) вычитая из первого уравнения полученной системы второе уравнение, находим

$$7y = 35,$$

$$y = 5;$$

3) подставляя $y = 5$ в первое уравнение исходной системы, получаем

$$2x + 5 \cdot 5 = 15,$$

$$x = -5.$$

Ответ: $x = -5$, $y = 5$.

Пример 3.

Решить систему

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}.$$

Решение.

Из первого уравнения находим $y = 2x - 1$. Подставляя во второе уравнение, имеем

$$4x - 2(2x - 1) = 2 \text{ или } 2 = 2$$

Полученное тождество означает, что система имеет бесконечное множество решений, определяемых по формуле

$$y = 2x - 1,$$

где x – любое число.

Ответ: x – любое число, $y = 2x - 1$.

Пример 4.

Решить систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 6x + 9y = 2 \end{cases}.$$

Решение.

Применяя способ алгебраического сложения, уравняем коэффициенты при x:

$$\begin{cases} 6x + 9y = 12 \\ 6x + 9y = 2 \end{cases}.$$

Вычитая из первого уравнения полученной системы второе уравнение, приходим к неверному равенству

$$0 = 10.$$

Полученное противоречие означает, что исходная система несовместна, т.е. она не имеет решений.

Ответ: система не имеет решений.

Пример 5.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 8x - 3y = 46 \\ 5x + 6y = 13 \end{cases}.$$

Решение.

1) Из первого уравнения находим выражение x через данные числа и неизвестное y:

$$x = \frac{46 + 3y}{8}.$$

2) Подставляем это выражение во второе уравнение:

$$5 \cdot \frac{46 + 3y}{8} + 6y = 13.$$

3) Решаем полученное уравнение:

$$5(46 + 3y) + 48y = 104,$$

$$230 + 15y + 48y = 104,$$

$$15y + 48y = 104 - 230,$$

$$63y = -126,$$

$$y = -2.$$

4) Найденное значение $y = -2$ подставляем в выражение

$$x = \frac{46 + 3y}{8}$$

и получаем

$$x = \frac{46 - 6}{8},$$

т.е. $x = 5$.

Ответ: $(5;\ -2)$.

Пример 6.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18 \\ x^2 - y^2 + x - y = 6 \end{cases}.$$

Решение.

Складывая почленно и вычитая уравнения данной системы, получаем равносильную систему

$$\begin{cases} x^2 + x - 12 = 0 \\ y^2 + y - 6 = 0 \end{cases}.$$

Решая первое уравнение, найдем

$$x = -4 \text{ и } x = 3;$$

решая второе уравнение, найдем

$$y = -3 \text{ и } y = 2.$$

Ответ: $(-4;\ -3)$, $(-4;\ 2)$, $(3;\ -3)$, $(3;\ 2)$.

Пример 7.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 y^3 = 8 \\ x^3 y^2 = 4 \end{cases}.$$

Решение.

1) Умножив почленно уравнения системы, найдем

$$(xy)^5 = 32 \Rightarrow xy = 2\,.$$

2) Тогда

$$y = \frac{2}{x}.$$

3) Подставив найденное выражение для y, например, в первое уравнение данной системы, получим

$$x^2 \cdot \frac{8}{x^3} = 8,$$

откуда $x = 1$. Поэтому $y = 2$.

Ответ: $(1;\ 2)$.

Пример 8.

Решить систему

$$\begin{cases} yz = 4 \\ xz = 3 \\ xy = 27 \end{cases}.$$

Решение.

Перемножив все соответствующие части первого и второго уравнений и использовав третье уравнение, получим

$$\begin{cases} yz = 4 \\ xz = 3 \\ xyz^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz = 4 \\ xz = 3 \\ 27z^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz = 4 \\ xz = 3 \\ z = \pm\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 4{,}5 \\ y = \pm 6 \\ z = \pm\dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

Ответ: $\left(\pm 4{,}5;\ \pm 6;\ \pm\frac{2}{3}\right)$.

Литература

- Математика для подготовительных курсов техникумов. Г.И. Богатырев. Москва «Наука» 1988.
- Справочник по элементарной математике. М.Я. Выгодский. Москва «Наука» 1986.
- Элементарная математика. Решение задач. В.М. Алексеев. Киев «Вища школа» 1984.