Алгебраические преобразования

В процессе преобразования алгебраических выражений переходим от одного алгебраического выражения к другому, более простому или удобному. Такой переход производим с помощью тождественных преобразований. Отметим, что при упрощении алгебраических выражений наиболее распространенными способами являются: вынесение общего множителя за скобки, разложение на множители.

Пример 1.

Упростить

$$A = \frac{(x^2 - y^2)(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{x^2y^3} - \sqrt[3]{x^3y^2} + \sqrt[3]{y^5}} - \left(\sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}\right).$$

Решение.

Для упрощения этого выражения разложим на множители знаменатель дроби. Для этого сгруппируем слагаемые и вынесем за скобки общие множители, записывая корни как степени с дробными показателями:

$$\left(x^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{2}{3}}y\right) - \left(xy^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{5}{3}}\right) = x^{\frac{2}{3}}(x+y) - y^{\frac{2}{3}}(x+y) = (x+y)\left(x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right).$$

Сделав преобразования и в числителе дроби, будем иметь

$$A = \frac{(x-y)(x+y)\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)}{(x+y)\left(x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)} - \left((xy)^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{(x-y)\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)}{x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}} - \left((xy)^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right).$$

Выражение $x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}$ запишем как разность квадратов:

$$x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right),$$

а $x - y$ как разность кубов:

$$x - y = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} + (xy)^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right).$$

Подставляя в A, получим

$$A=\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+(xy)^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)}-\left((xy)^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)=$$

$$=x^{\frac{2}{3}}+(xy)^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-(xy)^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{2}{3}}, x\neq\pm y.$$

Ответ: $A=x^{\frac{2}{3}}$ при $x\neq\pm y$.

Пример 2.

Упростить

$$A=\frac{b^{-\frac{1}{6}}\sqrt{a^3b}\,\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt[3]{b^2}\,\sqrt{a^3b^2}}{(2a^2-ab-b^2)\,\sqrt[6]{a^9b^4}}\div\left(\frac{3a^3}{2a^2-ab-b^2}-\frac{ab}{a-b}\right).$$

Решение.

Очевидные ограничения: $a>0$, $b>0$, $a\neq b$. Преобразуем сначала первую дробь, записывая все корни как степени с дробными показателями:

$$\frac{b^{-\frac{1}{6}}\,a^{\frac{3}{2}}\,b^{\frac{1}{2}}\,a\,b^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{2}{3}}\,a^{\frac{3}{2}}\,b}{(2a^2-ab-b^2)\,a^{\frac{3}{2}}\,b^{\frac{2}{3}}}=\frac{b^{\frac{2}{3}}\,a^{\frac{3}{2}}\,(a-b)}{(2a^2-ab-b^2)\,a^{\frac{3}{2}}\,b^{\frac{2}{3}}}=\frac{a-b}{2a^2-ab-b^2}.$$

Знаменатель полученной дроби раскладываем на множители:

$$2a^2-ab-b^2=a^2+a^2-ab-b^2=(a^2-b^2)+(a^2-ab)=(a-b)(a+b)+a(a-b)=$$

$$=(a-b)(2a-b).$$

Тогда

$$\frac{a-b}{2a^2-ab-b^2}=\frac{a-b}{(a-b)(2a+b)}=\frac{1}{2a+b}.$$

Теперь преобразуем выражение в круглых скобках:

$$\frac{3a^3}{(2a+b)(a-b)}-\frac{ab}{a-b}=\frac{3a^3-ab(2a+b)}{(2a+b)(a-b)}=\frac{a(3a^2-2ab-b^2)}{(2a+b)(a-b)}=$$

$$=\frac{a(3a+b)(a-b)}{(2a+b)(a-b)}=\frac{a(3a+b)}{2a+b}.$$

Подставляя в A, находим

$$A=\frac{1}{2a+b}\div\frac{a(3a+b)}{(2a+b)}=\frac{1}{2a+b}\cdot\frac{2a+b}{a(3a+b)}=\frac{1}{a(3a+b)}.$$

Ответ: $A=\frac{1}{a(3a+b)}$ при $a>0$, $b>0$, $a\neq b$.

Пример 3.

Упростить

$$A=\frac{x^2+2x-3+(x+1)\sqrt{x^2-9}}{x^2-2x-3+(x-1)\sqrt{x^2-9}}.$$

Решение.

Находим ограничения:

$$(x^2-9>0)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x>3,\\x<-3.\end{array}\right.$$

Рассмотрим отдельно эти случаи:

1) если $x>3$, то

$$x^2+2x-3=(x+3)(x-1);\ x^2-2x-3=(x-3)(x+1);$$

$$x+3=\left(\sqrt{x+3}\right)^2;\ \left(\sqrt{x-3}\right)^2=x-3.$$

Подставляя в A, находим

$$A=\frac{(x+3)(x-1)+(x+1)\sqrt{x^2-9}}{(x-3)(x+1)+(x-1)\sqrt{x^2-9}}=\frac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2(x-1)+(x+1)\sqrt{(x+3)(x-3)}}{\left(\sqrt{x-3}\right)^2(x+1)+(x-1)\sqrt{(x+3)(x-3)}}.$$

В числителе выносим за скобки общий множитель $\sqrt{x+3}$, а в знаменателе $\sqrt{x-3}$. Тогда получим

$$\frac{\sqrt{x+3}\left(\sqrt{x+3}(x-1)+(x+1)\sqrt{x-3}\right)}{\sqrt{x-3}\left(\sqrt{x-3}(x+1)+(x-1)\sqrt{x+3}\right)}=\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}};$$

2) если $x<-3$, то $x+3<0$, $x-3<0$. Поэтому

$$x+3=-|x+3|=-\left(\sqrt{|x+3|}\right)^2,$$

$$x-3=-|x-3|=-\left(\sqrt{|x-3|}\right)^2.$$

Применяя

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{|a|}\,\sqrt[n]{|b|},$$

находим

$$\sqrt{(x+3)(x-3)}=\sqrt{|x+3|}\,\sqrt{|x-3|}.$$

Подставлял в A и выполнив преобразования, получим

$$A=\frac{-\left(\sqrt{|x+3|}\right)^2(x-1)+(x+1)\sqrt{|x+3|}\,\sqrt{|x-3|}}{-\left(\sqrt{|x-3|}\right)^2(x+1)+(x-1)\sqrt{|x+3|}\,\sqrt{|x-3|}}=$$

$$=\frac{-\sqrt{|x+3|}\left((x-1)\sqrt{|x+3|}-(x+1)\sqrt{|x-3|}\right)}{\sqrt{|x-3|}\left((x-1)\sqrt{|x+3|}-(x+1)\sqrt{|x-3|}\right)}=-\frac{\sqrt{|x+3|}}{\sqrt{|x-3|}}=-\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}.$$

Ответ: $A=\begin{cases}\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}\text{ при } x>3,\\ -\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}\text{ при } x<-3.\end{cases}$

Пример 4.

Упростить

$$A = \left(2\sqrt{a} - \sqrt[4]{b}\right)^2 \div \left(\frac{a^2 - 7a\sqrt{b} + 9b}{a - 3\sqrt{b} + \sqrt[4]{a^2 b}} + \frac{13\sqrt{b}}{4}\right).$$

Решение.

Очевидные ограничения: $a > 0,\ b > 0$. Сначала преобразуем выражение, стоящее во вторых скобках:

$$\frac{a^2 - 7a\sqrt{b} + 9b}{a - 3\sqrt{b} + \sqrt[4]{a^2 b}} + \frac{13\sqrt{b}}{4} = \frac{\left(a^2 + 9b - 6a\sqrt{b}\right) + 6a\sqrt{b} - 7a\sqrt{b}}{a - 3\sqrt{b} + \sqrt{a}\sqrt[4]{b}} + \frac{13\sqrt{b}}{4} =$$

$$= \frac{\left(a - 3\sqrt{b}\right)^2 - a\sqrt{b}}{a - 3\sqrt{b} + \sqrt{a}\sqrt[4]{b}} + \frac{13\sqrt{b}}{4} = \frac{\left(a - 3\sqrt{b}\right)^2 - \left(\sqrt{a}\sqrt[4]{b}\right)^2}{a - 3\sqrt{b} + \sqrt{a}\sqrt[4]{b}} + \frac{13\sqrt{b}}{4} = a - 3\sqrt{b} - \sqrt{a}\sqrt[4]{b} + \frac{13\sqrt{b}}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(4a - 4\sqrt{a}\sqrt[4]{b} + \sqrt{b}\right) = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{a} - \sqrt[4]{b}\right)^2.$$

Подставляя в A, находим

$$A = \left(2\sqrt{a} - \sqrt[4]{b}\right)^2 \div \frac{\left(2\sqrt{a} - \sqrt[4]{b}\right)^2}{4} = 4.$$

Ответ: $A = 4$ при $2\sqrt{a} \neq \sqrt[4]{b},\ a - 3\sqrt{b} + \sqrt{a}\,\sqrt[4]{b} \neq 0,\ a > 0,\ b > 0.$

Пример 5.

Упростить

$$\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} - t^3} + \sqrt[3]{\frac{t^5 + 2t^4 + 4t^3}{4 - 4t + t^2}}\right) \div \left(\frac{1}{\sqrt{t} - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{2}}\right).$$

Решение.

Очевидные ограничения: $t \geq 0,\ t \neq 2.$

Выполняем преобразования:

$$\left(\sqrt[3]{8 - t^3} + \sqrt[3]{\frac{t^3(t^2 + 2t + 4)}{(t-2)^2}}\right) \div \frac{2\sqrt{2}}{t - 2} = \left(\sqrt[3]{8 - t^3} + \frac{t\,\sqrt[3]{(t^2 + 2t + 4)(2 - t)}}{\sqrt[3]{(2 - t)^3}}\right) \div \frac{2\sqrt{2}}{t - 2} =$$

$$= \left(\sqrt[3]{8-t^3} + \frac{t\sqrt[3]{8-t^3}}{2-t}\right) \div \frac{2\sqrt{2}}{t-2} = \sqrt[3]{8-t^3} \cdot \frac{2}{2-t} \div \frac{2\sqrt{2}}{t-2} = \sqrt[3]{8-t^3} \cdot \frac{2}{2-t} \cdot \frac{t-2}{2\sqrt{2}} =$$

$$= -\sqrt[3]{8-t^3} \cdot \frac{2}{t-2} \cdot \frac{t-2}{2\sqrt{2}} = -\sqrt[3]{8-t^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[3]{t^3-8}}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt[3]{t^3-8}}{\sqrt{2}}$ при $t \geq 0, t \neq 2$.

Пример 6.

Упростить

$$\frac{x^{-6}-64}{4+2x^{-1}+x^{-2}} \cdot \frac{x^2}{4-4x^{-1}+x^{-2}} - \frac{4x^2(2x+1)}{1-2x}.$$

Решение.

Находим область определения: $x \neq 0$; $(1-2x \neq 0) \Leftrightarrow \left(x \neq \frac{1}{2}\right)$. Раскладываем выражение $x^{-6} - 64$ как разность квадратов:

$$x^{-6} - 64 = (x^{-3}-8)(x^{-3}+8),$$

затем выражение $x^{-3} - 8$ раскладываем как разность кубов и, выполнив действие умножения, получаем

$$\frac{(x^{-1}-2)(x^{-2}+2x^{-1}+4)(x^{-3}+8)x^2}{(4+2x^{-1}+x^{-2})(x^{-1}-2)^2} = \frac{\left(\frac{1}{x^3}+8\right)x^2}{\frac{1}{x}-2} = \frac{1+8x^3}{1-2x}.$$

Окончательно имеем

$$\frac{1+8x^3}{1-2x} - \frac{4x^2(2x+1)}{1-2x} = \frac{1+8x^3-8x^3-4x^2}{1-2x} = \frac{1-4x^2}{1-2x} = \frac{(1-2x)(1+2x)}{1-2x} = 1+2x.$$

Ответ: $1+2x$ при $x \neq 0, x \neq \frac{1}{2}$.

Пример 7.

Упростить

$$\sqrt[3]{x+\sqrt{2-x^2}}\,\sqrt[6]{1-x\sqrt{2-x^2}}$$

при $|x| \le 1$.

Решение.

Представим $\sqrt[3]{x+\sqrt{2-x^2}}$ в виде

$$\sqrt[3]{x+\sqrt{2-x^2}} = \sqrt[6]{\left(x+\sqrt{2-x^2}\right)^2} = \sqrt[6]{x^2+2x\sqrt{2-x^2}+(2-x^2)} =$$

$$= \sqrt[6]{2+2x\sqrt{2-x^2}} = \sqrt[6]{2\left(1+x\sqrt{2-x^2}\right)}.$$

Тогда данное выражение примет вид

$$\sqrt[6]{2\left(1+x\sqrt{2-x^2}\right)\left(1-x\sqrt{2-x^2}\right)} = \sqrt[6]{2\left(1-x^2(2-x^2)\right)} = \sqrt[6]{2(1-2x^2+x^4)} =$$

$$= \sqrt[6]{2(1-x^2)^2} = \sqrt[6]{2}\,\sqrt[6]{(1-x^2)^2} = \sqrt[6]{2}\,\sqrt[3]{1-x^2}.$$

Таким образом, при решении данного примера мы сначала привели корни к одному показателю, а затем выполнили преобразования.

Ответ: $\sqrt[6]{2}\,\sqrt[3]{1-x^2}$.

Пример 8.

Упростить

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\;\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}.$$

Решение.

Имеем

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt[4]{\left(2+\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt[4]{4+4\sqrt{3}+3} = \sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}$$

и окончательно

$$\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}\;\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}} = \sqrt[4]{49-\left(4\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt[4]{49-48} = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 9.

Упростить

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}}\,.$$

Решение.

Преобразуем подкоренное выражение (выделение полного квадрата под радикалом)

$$5-2\sqrt{6}=5-2\,\sqrt{3}\,\sqrt{2}=3+2-2\,\sqrt{3}\,\sqrt{2}=\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2-2\,\sqrt{3}\,\sqrt{2}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2.$$

Окончательно имеем

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

Ответ: $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Пример 10.

Упростить

$$\sqrt{7-2\sqrt{6}}\,.$$

Решение.

Преобразуем подкоренное выражение

$$7-2\sqrt{6}=7-2\cdot 1\cdot\sqrt{6}=6+1-2\sqrt{6}=\left(\sqrt{6}-1\right)^2$$

и получим

$$\sqrt{7-2\sqrt{6}}=\sqrt{\left(\sqrt{6}-1\right)^2}=\sqrt{6}-1.$$

Ответ: $\sqrt{6}-1$.