Збірка прикладів на тему: "Границя"

Використано збірник з математики за редакцією М. І. Сканаві.

Уклав: Виспянський Ігор (**e-mail:** virua@ukr.net)
Дата останнього оновлення: 16.07.07
Веб-сайт: http://www.formula.co.ua

Приклад 1.

Знайти

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x-4}.$$

Розв'язок.

Функція $f(x)=\dfrac{x^3-8}{2x-4}$ в точці $x=2$ не визначена. Розклавши чисельник на множники за формулою

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),$$

запишемо цю функцію у вигляді

$$f(x)=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{2(x-2)}.$$

В області визначення функції $f(x)$ вираз $x-2\neq 0$, тому дріб можна скоротити на $x-2$. Тоді

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{2}=f(2)=6.$$

Відповідь: 6.

Приклад 2.

Знайти

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4}.$$

Розв'язок.

Функція $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4}$ в точці $x=4$ не визначена. Помноживши чисельник і знаменник на $\sqrt{x^2-7}+3\neq 0$ та використавши формулу

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$

перетворимо дріб:

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-7-9}{(x-4)\left(\sqrt{x^2-7}+3\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{(x-4)\left(\sqrt{x^2-7}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)\left(\sqrt{x^2-7}+3\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{x+4}{\sqrt{x^2-7}+3}=f(4)=\frac{4}{3}.$$

Відповідь: $\dfrac{4}{3}$.

Приклад 3.

Обчислити

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4}.$$

Розв'язок.

Функція $f(x)=\dfrac{x^3+8}{x^2-4}$ в точці $x=-2$ не визначена. Використавши для чисельника формулу

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$

а для знаменника –

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$

перетворимо дріб:

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x+4}{x-2}=$$

$$=f(-2)=\frac{4+4+4}{-4}=-3 .$$

Відповідь: -3.

Приклад 4.

Обчислити

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}.$$

Розв'язок.

Функція $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}$ в точці $x=-1$ не визначена. Перетворимо дріб:

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{(x^3-x)+(x^2-1)}{(x^3+x)+(x^2+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x(x^2-1)+(x^2-1)}{x(x^2+1)+(x^2+1)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-1)}{(x+1)(x^2+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+1}=f(-1)=0 .$$

Відповідь: 0.

Приклад 5.

Обчислити

$$\lim_{x\to \frac{2}{5}}\frac{5x^3-2x^2+5x-2}{5x^4-2x^3-5x^2+2x}.$$

Розв'язок.

Функція $f(x)=\dfrac{5x^3-2x^2+5x-2}{5x^4-2x^3-5x^2+2x}$ в точці $x=\dfrac{2}{5}$ не визначена. Перетворимо дріб:

$$\lim_{x\to \frac{2}{5}} f(x)=\lim_{x\to \frac{2}{5}}\frac{(5x^3+5x)-(2x^2+2)}{(5x^4-5x^2)-(2x^3-2x)}=\lim_{x\to \frac{2}{5}}\frac{5x(x^2+1)-2(x^2+1)}{5x^2(x^2-1)-2x(x^2-1)}=$$

$$=\lim_{x\to \frac{2}{5}}\frac{(5x-2)(x^2+1)}{(5x^2-2x)(x^2-1)}=\lim_{x\to \frac{2}{5}}\frac{(5x-2)(x^2+1)}{x(5x-2)(x^2-1)}=\lim_{x\to \frac{2}{5}}\frac{x^2+1}{x(x^2-1)}=$$

$$= f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{\frac{4}{25}+1}{\frac{2}{5}\left(\frac{4}{25}-1\right)} = -\frac{145}{42} .$$

Відповідь: $-\frac{145}{42}$.

Приклад 6.

Обчислити

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{2x+1}}{x} .$$

Розв'язок.

Функція $f(x)=\frac{1-\sqrt{2x+1}}{x}$ в точці $x=0$ не визначена. Перетворимо дріб:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1-\sqrt{2x+1}\right)\left(1+\sqrt{2x+1}\right)}{x\left(1+\sqrt{2x+1}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-2x-1}{x\left(1+\sqrt{2x+1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{x\left(1+\sqrt{2x+1}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2}{1+\sqrt{2x+1}} = f(0) = -1 .$$

Відповідь: -1.

Приклад 7.

Обчислити

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3} .$$

Розв'язок.

Функція $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$ в точці $x=2$ не визначена. Перетворимо дріб:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{\left(\sqrt{4x+1}-3\right)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{4x+1-9} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{4x-8} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{4(x-2)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{4x+1}+3}{4} = f(2) = \frac{\sqrt{9}+3}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5 .$$

Відповідь: $1{,}5$.