Приклад 1.

Визначити найменший цілий розв'язок нерівності

$$2x + 3 < 5x - 2.$$

Розв'язок.

$$2x + 3 < 5x - 2$$

$$2x - 5x < -2 - 3$$

$$-3x < -5$$

$$x > 1{,}66(6).$$

Відповідь: 2 – найменший цілий розв'язок нерівності.

Приклад 2.

Визначити найменший цілий розв'язок нерівності

$$5 - 3x \leq x + 1.$$

Розв'язок.

$$5 - 3x \leq x + 1$$

$$-3x - x \leq 1 - 5$$

$$-4x \leq -4$$

$$x \geq 1.$$

Відповідь: 1 – найменший цілий розв'язок нерівності.

Приклад 3.

Визначити кількість цілих розв'язків системи нерівностей, що задовольняють умову $x \leq 5$:

$$\begin{cases} 3x - 2 \geq 2x + 1 \\ 5x + 7 \geq 3 - 2x \end{cases}.$$

Розв'язок.

Долучаємо до системи з двох нерівностей третю і отримаємо:

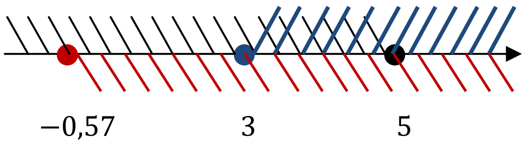
$$\begin{cases} 3x - 2 \geq 2x + 1 \\ 5x + 7 \geq 3 - 2x \\ x \leq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2x \geq 1 + 2 \\ 5x + 2x \geq 3 - 7 \\ x \leq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ 7x \geq -4 \\ x \leq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq -0{,}57\ldots \\ x \leq 5 \end{cases}$$

Заштрихуємо проміжки, що задовольняють цю систему нерівностей і позначимо на осі точки $x = -0{,}57$, $x = 3$ і $x = 5$:



Розв’язки трьох нерівностей системи перетинаються на проміжку $[3; 5]$.

Відповідь: 3 **–** кількість цілих розв’язків системи нерівностей.

Приклад 4.

Визначити кількість цілих розв’язків системи нерівностей, що задовольняють умову $x \leq 5$:

$$\begin{cases} 2x + 1 \geq -3 + 2x \\ x - 3 < 2x + 2 \end{cases}.$$

Розв’язок.

Долучаємо до системи з двох нерівностей третю і отримаємо:

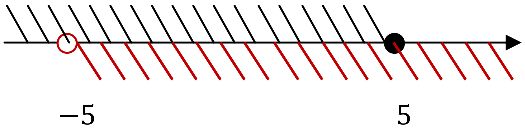
$$\begin{cases} 2x + 1 \geq -3 + 2x \\ x - 3 < 2x + 2 \\ x \leq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 2x \geq -3 - 1 \\ x - 2x < 2 + 3 \\ x \leq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \geq -3 \\ -x < 5 \\ x \leq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -5 \\ x \leq 5 \end{cases}.$$

Заштрихуємо проміжки, що задовольняють цю систему нерівностей і позначимо на осі точки $x = -5$ і $x = 5$:



і отримаємо проміжок $(-5; 5]$.

Відповідь: 10 **–** кількість цілих розв’язків системи нерівностей.

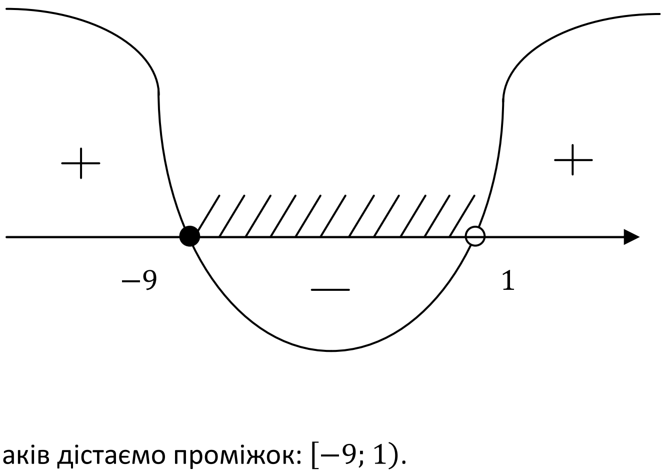
Приклад 5.

Визначити кількість цілих розв’язків нерівності

$$\frac{x+9}{x-1} \leq 0.$$

Розв’язок.

Коренями рівняння $x + 9 = 0$ і $x - 1 = 0$ є числа $x_1 = -9$ і $x_2 = 1$ відповідно. $x_2 = 1$ не є розв’язком заданої нерівності, бо знаменник не повинен бути рівний нулю, тобто $x \neq 1$, і тому на числовій осі позначаємо її світлим кружечком. Легко визначити, що при $x > 1$ ліва частина нерівності додатна – ставимо знак «плюс» праворуч від точки 1 і, рухаючись вліво, чергуємо знаки «плюс» і «мінус». При цьому зміну знаків зручно ілюструвати за допомогою хвилеподібної кривої (кривої знаків), проведеної через помічені точки і розміщеної вище або нижче від числової осі у відповідності із знаком нерівності в розглядуваному проміжку.



За допомогою кривої знаків дістаємо проміжок: $[-9; 1)$.

Відповідь: 10 – кількість цілих розв’язків нерівності.

Приклад 6.

Визначити найменший натуральний цілий розв'язок нерівності

$$x^2 \leq 9x - 5.$$

Розв'язок.

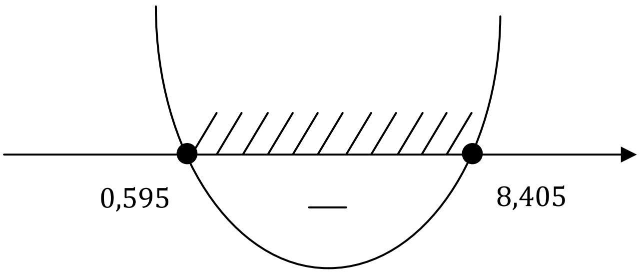
$$x^2 \leq 9x - 5$$

$$x^2 - 9x + 5 \leq 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 81 - 20 = 61$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{9 + 7{,}81}{2} = \frac{16{,}81}{2} = 8{,}405 \ldots$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{9 - 7{,}81}{2} = \frac{1{,}19}{2} = 0{,}595 \ldots$$



За допомогою кривої знаків дістаємо проміжок: $[0{,}595; 8{,}405]$.

Відповідь: 1 – найменший натуральний цілий розв'язок нерівності.

Приклад 7.

Визначити цілий розв'язок нерівності

$$x^2 + 10x + 24 < 0.$$

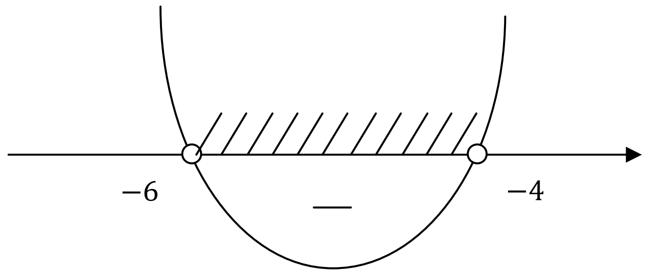
Розв'язок.

$$x^2 + 10x + 24 < 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24 = 100 - 96 = 4.$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-10 + 2}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-10 - 2}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$



За допомогою кривої знаків дістаємо проміжок: $(-6;\ -4)$.

Відповідь: -5 – цілий розв'язок нерівності.

Приклад 8.

Визначити найбільший розв'язок нерівності

$$\sqrt{15 - 2x} + \sqrt{x + 1} > 1$$

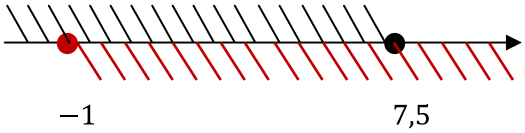
Розв'язок.

Як відомо, підкореневий вираз має бути більшим-рівним за нуль. Скористаємося цим і укладемо систему нерівностей:

$$\begin{cases} 15 - 2x \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x \geq -15 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 7{,}5 \\ x \geq -1 \end{cases}$$



Отже, маємо проміжок: $[-1; 7{,}5]$.

Відповідь: $7{,}5$ – найбільший розв'язок нерівності.

Приклад 9.

Визначити найбільший розв’язок нерівності

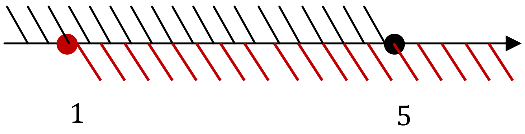
$$\sqrt{10-2x}\,\sqrt{x-1} \le 2.$$

Розв’язок.

$$\begin{cases} 10-2x \ge 0 \\ x-1 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x \ge -10 \\ x \ge 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 5 \\ x \ge 1 \end{cases}$$



Отже, маємо проміжок $[1; 5]$.

Відповідь: 5 – найбільший розв’язок нерівності.

Приклад 10.

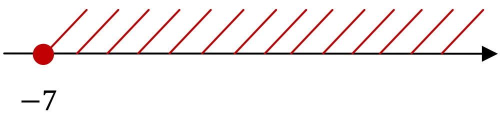
Визначити найменший розв’язок нерівності

$$\sqrt{x+7} > 4 + x.$$

Розв’язок.

$$x + 7 \ge 0$$

$$x \ge -7$$



Отже, маємо проміжок: $[-7; +\infty)$.

Відповідь: -7 – найменший розв’язок нерівності.

Приклад 11.

Визначити найменший цілий розв’язок нерівності

$$\sqrt{x+2}\,\sqrt{x-3}\,(2x-19)<0$$

Розв’язок.

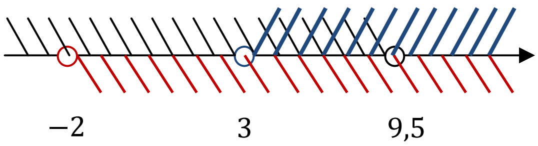
$$\sqrt{x+2}\,\sqrt{x-3}\,(2x-19)<0$$

Підкореневий вираз має бути більшим-рівним за нуль, але взявши до уваги те, що ліва частина нерівності має бути менша за нуль (це можливо лише, коли обидва підкореневі вирази строго більші за нулю, а вираз в дужках менший за нуль), укладемо систему нерівностей:

$$\begin{cases} x+2>0 \\ x-3>0 \\ 2x-19<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>-2 \\ x>3 \\ 2x<19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>-2 \\ x>3 \\ x<9{,}5 \end{cases}.$$



Отже, маємо проміжок $(3;\ 9{,}5)$.

Відповідь: 4 – найменший цілий розв’язок нерівності.

Приклад 12.

Визначити найбільший розв’язок нерівності

$$4^{2+x}\le 8^{-\frac{4}{3}}.$$

Розв’язок.

$$4^{2+x}\le 8^{-\frac{4}{3}}$$

$$2^{2(2+x)}\le 2^{3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)}$$

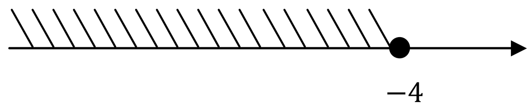
$$2^{4+2x}\le 2^{-4}$$

$$4+2x\le -4$$

$$2x \le -4 - 4$$

$$2x \le -8$$

$$x \le -4.$$



Отже, маємо проміжок: $(-\infty; -4]$.

Відповідь: -4 – найбільший розв’язок нерівності.

Приклад 13.

Визначити найменший цілий розв’язок нерівності

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{9}{8}\right)^x < \frac{27}{64}.$$

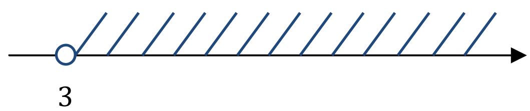
Розв’язок.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{9}{8}\right)^x < \frac{27}{64}$$

$$\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8}\right)^x < \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x < \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$x > 3$$



Отже, маємо такий проміжок: $(3;\ +\infty)$.

Відповідь: 4 – найменший цілий розв’язок нерівності.

Приклад 14.

Визначити найбільший цілий розв’язок нерівності

$$(0{,}7)^{x+2} > 2\frac{2}{49}.$$

Розв’язок.

$$(0{,}7)^{x+2} > 2\frac{2}{49}$$

$$\left(\frac{7}{10}\right)^{x+2} > \frac{100}{49}$$

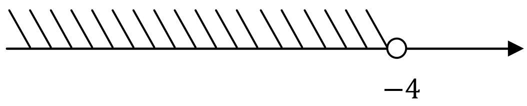
$$\left(\frac{7}{10}\right)^{x+2} > \left(\frac{10}{7}\right)^{2}$$

$$\left(\frac{7}{10}\right)^{x+2} > \left(\frac{7}{10}\right)^{-2}$$

$$x + 2 < -2$$

$$x < -2 - 2$$

$$x < -4.$$



Отже, маємо такий проміжок: $(-\infty; -4)$.

Відповідь: -5 – найбільший цілий розв’язок нерівності.

Приклад 15.

Визначити найменше число x, що задовольняє нерівність

$$\log_3(2 - x) \leq 3.$$

Розв’язок.

$$\log_3(2 - x) \leq 3$$

$$0 < 2 - x \leq 3^3$$

$$0 < 2 - x \leq 27$$

$$-2 < -x \leq 27 - 2$$

$$-2 < -x \leq 25$$

$$2 > x \geq -25.$$

Отже, маємо такий проміжок: $[-25; 2)$.

Відповідь: -25 – найменше число x, що задовольняє нерівність.

Приклад 16.

Визначити найбільше число x, що задовольняє нерівність

$$\log_3(x-5) \leq 2.$$

Розв'язок.

$$\log_3(x-5) \leq 2$$

$$0 < x-5 \leq 3^2$$

$$0 < x-5 \leq 9$$

$$5 < x \leq 9+5$$

$$5 < x \leq 14.$$

Отже, маємо такий проміжок: $(5; 14]$.

Відповідь: 14 – найбільше число x, що задовольняє нерівність.

Приклад 17.

Визначити найбільше число x, що задовольняє нерівність

$$\log_{\frac{1}{3}}(1-5x) \leq -3.$$

Розв'язок.

$$\log_{\frac{1}{3}}(1-5x) \leq -3$$

$$1-5x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$$

$$1-5x \geq 3^3$$

$$1-5x \geq 27$$

$$-5x \geq 27-1$$

$$-5x \geq 26$$

$$x \leq -\frac{26}{5}$$

$$x \leq -5{,}2.$$

Отже, маємо проміжок: $(-\infty; -5{,}2]$.

Відповідь: $-5{,}2$ – найбільше число x, що задовольняє нерівність.

Приклад 18.

Визначити найменше ціле число x, що задовольняє нерівність

$$\log_{11}(x+2) \le 1.$$

Розв'язок.

$$\log_{11}(x+2) \le 1$$

$$0 < x+2 \le 11$$

$$-2 < x \le 11-2$$

$$-2 < x \le 9$$

Отже, маємо такий проміжок: $(-2; 9]$.

Відповідь: -1 – найменше ціле число x, що задовольняє нерівність.

Приклад 19.

Визначити кількість цілих розв'язків нерівності

$$|x-1| \le 2.$$

Розв'язок.

Піднесемо обидві частини нерівності до квадрату, перенесемо праву частину вліво і використаємо формулу $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$:

$$(x-1)^2 \le 2^2$$

$$(x-1)^2 - 2^2 \le 0$$

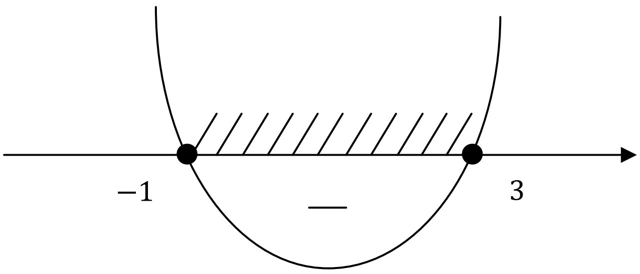
$$\big((x-1)-2\big)\big((x-1)+2\big) \le 0$$

$$(x-1-2)(x-1+2) \le 0$$

$$(x-3)(x+1) \le 0$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -1$$



За допомогою кривої знаків дістаємо проміжок: $[-1; 3]$.

Відповідь: 5 – кількість цілих розв'язків нерівності.

Приклад 20.

Визначити кількість цілих розв'язків нерівності

$$|x + 4| < 5.$$

Розв'язок.

Піднесемо обидві частини нерівності до квадрату, перенесемо праву частину вліво і використаємо формулу $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

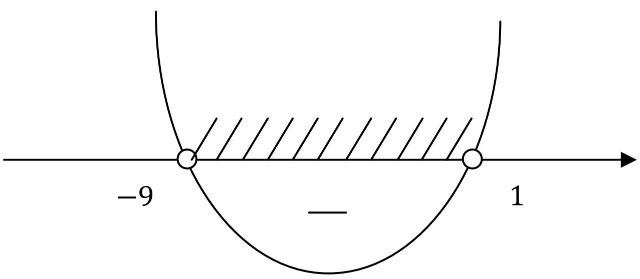
$$(x + 4)^2 < 5^2$$

$$(x + 4)^2 - 5^2 < 0$$

$$(x + 4 - 5)(x + 4 + 5) < 0$$

$$(x - 1)(x + 9) < 0$$

$$x_1 = 1, x_2 = -9$$



За допомогою кривої знаків дістаємо проміжок: $(-9; 1)$.

Відповідь: 9 – кількість цілих розв'язків нерівності.