

Збірка прикладів на тему: "Похідна функції та її застосування"

Уклав: Виспянський Ігор (e-mail: virua@ukr.net)

Дата останнього оновлення: 06.11.06

Веб-сайт: <http://www.formula.co.ua>

Приклад 1.

Обчислити $f'(5)$, якщо $f(x) = (2x + 1)^3$.

Розв'язок.

$$f'(x) = ((2x + 1)^3)' = 3 \cdot 2 \cdot (2x + 1)^2 = 6(2x + 1)^2.$$

$$f'(5) = 6(2 \cdot 5 + 1)^2 = 6 \cdot 121 = 726.$$

Відповідь: 726.

Приклад 2.

Обчислити $f'(3)$, якщо $f(x) = (x + 3)^2 + 1$.

Розв'язок.

$$f'(x) = ((x + 3)^2 + 1)' = 2 \cdot (x + 3).$$

$$f'(3) = 2 \cdot (3 + 3) = 12.$$

Відповідь: 12.

Приклад 3.

Обчислити $f'(2)$, якщо $f(x) = 2x^2 + 1$.

Розв'язок.

$$f'(x) = (2x^2 + 1)' = 2 \cdot 2x = 4x.$$

$$f'(2) = 4 \cdot 2 = 8.$$

Відповідь: 8.

Приклад 4.

Обчислити $f'(3)$, якщо

$$f(x) = \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{81}x^5 + 51.$$

Розв'язок.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{81}x^5 + 51 \right)' = \frac{3}{18}x^2 - \frac{5}{81}x^4 = \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{81}x^4.$$

$$f'(3) = \frac{1}{6} \cdot 3^2 - \frac{5}{81} \cdot 3^4 = \frac{9}{6} - \frac{5 \cdot 81}{81} = 1,5 - 5 = -3,5.$$

Відповідь: -3,5.

Приклад 5.Обчислити $y'(0,5)$, якщо

$$y = \frac{x}{1-4x}.$$

Розв'язок.

$$\begin{aligned}y'(x) &= \left(\frac{x}{1-4x}\right)' = \frac{x'(1-4x) - x(1-4x)'}{(1-4x)^2} = \\&= \frac{1-4x+4x}{(1-4x)^2} = \frac{1}{(1-4x)^2}. \\y'(0,5) &= \frac{1}{(1-4 \cdot 0,5)^2} = \frac{1}{(1-2)^2} = 1.\end{aligned}$$

Відповідь: 1.**Приклад 6.**Обчислити $y'(0)$, якщо

$$y = \frac{\cos x}{1-x}.$$

Розв'язок.

$$\begin{aligned}y'(x) &= \left(\frac{\cos x}{1-x}\right)' = \frac{(\cos x)'(1-x) - \cos x \cdot (1-x)'}{(1-x)^2} = \\&= \frac{-\sin x \cdot (1-x) + \cos x}{(1-x)^2}. \\y'(0) &= \frac{-\sin 0 \cdot (1-0) + \cos 0}{(1-0)^2} = \frac{0 \cdot 1 + 1}{1} = 1.\end{aligned}$$

Відповідь: 1.**Приклад 7.**Обчислити значення похідної від функції $y = 2 \cos 5x$ в точці $x = \frac{\pi}{6}$.**Розв'язок.**

$$\begin{aligned}y'(x) &= (2 \cos 5x)' = 2 \cdot 5 \cdot (-\sin 5x) = -10 \cdot \sin 5x. \\y'\left(\frac{\pi}{6}\right) &= -10 \cdot \sin\left(5 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = -10 \cdot \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \\&= -10 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -10 \cdot \frac{1}{2} = -5.\end{aligned}$$

Відповідь: -5 .

Приклад 8.

Обчислити значення похідної від функції $y = 5e^{-2x+1}$ в точці $x = \frac{1}{2}$.

Розв'язок.

$$y'(x) = (5e^{-2x+1})' = 5 \cdot (-2)e^{-2x+1} = -10e^{-2x+1}.$$

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) = -10 \cdot e^{-2 \cdot \frac{1}{2} + 1} = -10 \cdot e^{-1+1} = -10 \cdot e^0 = -10 \cdot 1 = -10.$$

Відповідь: -10 .

Приклад 9.

Обчислити $f'(-4)$, якщо $f(x) = 4 + \ln(x + 5) + 13x$.

Розв'язок.

$$f'(x) = (4 + \ln(x + 5) + 13x)' = \frac{1}{x + 5} + 13.$$

$$f'(-4) = \frac{1}{-4 + 5} + 13 = \frac{1}{1} + 13 = 14.$$

Відповідь: 14 .

Приклад 10.

До параболи $y = x^2 - mx + 7$ проведена дотична під кутом 45° . При якому значенні параметра m абсциса точки дотику дорівнює 4 ?

Розв'язок.

$$y'(4) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

$$y'(x) = (x^2 - mx + 7)' = 2x - m,$$

$$y'(4) = 2 \cdot 4 - m = 8 - m.$$

Отже,

$$8 - m = 1.$$

$$-m = 1 - 8.$$

$$-m = -7.$$

$$m = 7.$$

Відповідь: 7 .

Приклад 11.

Визначити абсцису точки на параболі $y = -x^2 + 8x - 3$, у якій кутовий коефіцієнт дотичної до кривої дорівнює -6 ?

Розв'язок.

$$y'(x) = (-x^2 + 8x - 3)' = -2x + 8.$$

$$-2x + 8 = -6$$

$$-2x = -6 - 8$$

$$-2x = -14$$

$$x = 7.$$

Відповідь: 7.

Приклад 12.

Обчислити найбільше значення функції

$$y = -x^3 + 3x^2 - 5$$

на проміжку $[-3; 0]$.

Розв'язок.

$$y' = (-x^3 + 3x^2 - 5)' = -3 \cdot x^2 + 3 \cdot 2x = -3 \cdot x^2 + 6x.$$

$$-3 \cdot x^2 + 6x = 0$$

$$3 \cdot x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2.$$

$$y(-3) = 27 + 27 - 5 = 49,$$

$$y(0) = -5,$$

$$y(2) = -8 + 12 - 5 = -1.$$

Відповідь: 49.

Приклад 13.

Рівняння дотичної до кривої

$$y = -x^2 + 5x + 4$$

має вигляд $y = 3x + 5$. Визначити ординату точки дотику.

Розв'язок.

З рівняння дотичної $y = 3x + 5$ маємо $y' = 3$.

$$y' = (-x^2 + 5x + 4)' = -2x + 5.$$

$$-2x + 5 = 3$$

$$-2x = 3 - 5$$

$$-2x = -2$$

$$x = 1.$$

$$y(1) = -1^2 + 5 \cdot 1 + 4 = -1 + 5 + 4 = 8.$$

Відповідь: 8.

Приклад 14.

Визначити точку екстремуму функції $y = 2x^2 + 13x + 3$.

Розв'язок.

$$y' = (2x^2 + 13x + 3)' = 2 \cdot 2x + 13 = 4x + 13.$$

$$4x + 13 = 0$$

$$4x = -13$$

$$x = -3,25.$$

Відповідь: $-3,25$.