Комплексні числа (збірник прикладів)

Джерело: М.С. Залогін. Конкурсні задачі з математики. Київ 1969
Уклав: Виспянський Ігор (e-mail: virua@ukr.net, сайт: http://vispyanskiy.name/)
Львів, 1 жовтня 2011 року

Приклад 1.

Подати в тригонометричній формі і підрахувати $\sqrt{1+i}$.

Розв'язування

Запишемо даний вираз у вигляді

$$\sqrt{1+i} = \sqrt[4]{2}\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)}.$$

За формулою Муавра

$$\sqrt{1+i} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right).$$

Нехай $k = 0$, тоді

$$\sqrt{1+i} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right).$$

Застосовуючи формули

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \text{ і } \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

дістанемо

$$\sqrt{1+i} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right).$$

Нехай $k = 1$, тоді

$$\sqrt{1+i} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9}{8}\pi + i\sin\frac{9}{8}\pi\right).$$

Після відповідних перетворень одержимо

$$\sqrt{1+i} = -\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right).$$

Приклад 2.

Обчислити вираз $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$.

Розв'язування

1-ий спосіб розв'язання.

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100} = \left(\frac{1+2i+i^2}{2}\right)^{50} = \left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^{50} = i^{50} = (i^2)i^{48} = -1.$$

2-ий спосіб розв’язання.

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100} = (\cos 45° + i\sin 45°)^{100} = (\cos 180° + i\sin 180°)^{25} = -1.$$

Приклад 3.

Обчислити вираз $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{60}$.

Розв’язування

1-ий спосіб розв’язання.

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{60} = \left(\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3}\right)^{20} = \left(\frac{-3\sqrt{3}i+9+3\sqrt{3}i-1}{8}\right)^{20} = \left(\frac{8}{8}\right)^{20} = 1.$$

2-ий спосіб розв’язання.

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{60} = (\cos 120° + i\sin 120°)^{60} = \cos 0° + i\sin 0° = 1.$$

Приклад 4.

Розв’язати рівняння $z^8 = 1$.

Розв’язування

Нехай $z = \sqrt[8]{1}$. Одиницю можна виразити так:

$$1 = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi.$$

Тоді

$$z = \sqrt[8]{\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi} = \cos\frac{2k\pi}{8} + i\sin\frac{2k\pi}{8},$$

де $k = 0; 1; 2; 3; \dots; 7$.

Отже, маємо вісім значень:

$$z_1 = 1;$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$z_3 = i;$$

$$z_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$z_5 = -1;$$

$$z_6 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$z_7 = -i;$$

$$z_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Примітка. Розв'язання двочленного рівняння $z^8 = 1$ рівнозначно відшуканню восьми значень кореня із одиниці. Якщо в площині комплексних чисел накреслимо коло $|z| = 1$, тобто коло одиничного радіуса, і поділимо його на вісім рівних частин діаметрами, причому початкова точка поділу повинна відповідати числу 1, то числа, які відповідатимуть всім точкам поділу, дадуть значення кореня восьмого степеня із одиниці.

Приклад 5.

Розв'язати рівняння $3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2 = 0$, якщо відомо, що один з коренів $1 + i$.

Розв'язування

Якщо рівняння з дійсними коефіцієнтами має корінь $x_1 = 1 + i$, то його задовольняє також корінь $x_2 = 1 - i$. Отже, многочлен, що стоїть у лівій частині рівняння, ділиться на множник

$$(x - 1 - i)(x - 1 + i) = (x - 1)^2 - i^2 = x^2 - 2x + 2.$$

Прирівнюючи нулю частку від ділення, дістанемо рівняння

$$3x^2 + x - 1 = 0,$$

яке має корені

$$x = \frac{1}{6}\left(-1 \pm \sqrt{13}\right).$$

Таким чином, вихідне рівняння четвертого степеня має такі корені:

$$x_1 = 1 + i;$$

$$x_2 = 1 - i;$$

$$x_3 = \frac{1}{6}\left(-1 + \sqrt{13}\right);$$

$$x_4 = \frac{1}{6}\left(-1 - \sqrt{13}\right).$$

Приклад 6.

Спростити вираз

$$\frac{a + ib}{a - ib} + \frac{a - ib}{a + ib}.$$

Розв'язування

$$\frac{a+ib}{a-ib}+\frac{a-ib}{a+ib}=\frac{(a+ib)^2+(a-ib)^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2-b^2+a^2-b^2}{a^2+b^2}=2\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

Приклад 7.

Знайти область

$$|z|\le 1.$$

Розв'язування

$$|z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2};$$

$$\sqrt{x^2+y^2}\le 1;$$

$$x^2+y^2\le 1,$$

очевидно, що це буде коло, радіус якого дорівнює одиниці.

Приклад 8.

При яких дійсних значеннях x і y справедлива рівність

$$\frac{x-2+(y-3)i}{1+i}=1-3i?$$

Розв'язування

Запишемо дану рівність так:

$$x-2+i(y-3)=4-2i.$$

Згідно з означенням рівності двох комплексних чисел

$$x-2=4;\ \ x=6;$$

$$y-3=-2;\ \ \ y=1.$$

Приклад 9.

Обчислити модуль комплексного числа

$$\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{3}.$$

Розв'язування

$$\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$r=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Приклад 10.

За формулою Муавра знайти

$$\sin 4\varphi\,;\ \cos 4\varphi.$$

Розв'язування

Розглянемо вираз

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4.$$

З одного боку,

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4 = \cos 4\varphi + i\sin 4\varphi\,;$$

з другого боку,

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4 = \cos^4\varphi + 4i\cos^3\varphi\sin\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi - 4i\cos\varphi\sin^3\varphi + \sin^4\varphi.$$

Зрівняємо дійсні та уявні частини:

$$\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi\,;$$

$$\sin 4\varphi = 4\cos\varphi\sin\varphi\,(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

Приклад 11.

Знайти

$$(1+5i)^{150}.$$

Розв'язування

Виразимо $(1+5i)$ в тригонометричній формі:

$$1+5i = \sqrt{26}(\cos(\operatorname{arctg}5) + i\sin(\operatorname{arctg}5)),$$

тоді

$$(1+5i)^{150} = 26^{75}(\cos(\operatorname{arctg}5) + i\sin(\operatorname{arctg}5))^{150} = 26^{75}(\cos(150\operatorname{arctg}5) + i\sin(150\operatorname{arctg}5)).$$

Приклад 12.

При яких дійсних значеннях m корені рівняння

$$(m+2)x^2 - 2mx + m - 1 = 0$$

будуть комплексними?

Розв'язування

Розв'язуючи рівняння

$$(m+2)x^2 - 2mx + m - 1 = 0,$$

дістанемо

$$x = \frac{m \pm \sqrt{2-m}}{m+2}.$$

Корені квадратного рівняння з дійсними коефіцієнтами будуть комплексними в тому разі, коли дискримінант рівняння від'ємний, тобто

$$4m^2 - 4(m+2)(m-1) < 0;$$

$$2 - m < 0;$$

$$m > 2.$$

Приклад 13.

Перетворити вираз

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{60} + \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{30}.$$

Розв'язування

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3} = -1;$$

$$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{3} = -1.$$

Отже,

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{60} + \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{30} = (-1)^{20} + (-1)^{10} = 2.$$

Приклад 14.

Нехай x і y – комплексні числа. Довести, що

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2).$$

Розв'язування

Нехай

$$x = \alpha + \beta i;$$

$$y = \eta + \xi i,$$

тоді

$$x + y = \alpha + \eta + (\beta + \xi)i;$$

$$x - y = \alpha - \eta + (\beta - \xi)i.$$

Таким чином, ліву частину рівності можна записати у такому вигляді:

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = (\alpha+\eta)^2 + (\beta+\xi)^2 + (\alpha-\eta)^2 + (\beta-\xi)^2 =$$

$$= 2(\alpha^2 + \beta^2) + 2(\eta^2 + \xi^2) = 2(|x|^2 + |y|^2).$$