Збірка прикладів на тему: "Комбінаторика"

Використано інформаційно-практичний бюлетень
"Все для вчителя" (Січень 1-2'2006).

Уклав: Виспянський Ігор (e-mail: virua@ukr.net)

Дата останнього оновлення: 03.02.07

Веб-сайт: http://www.formula.co.ua

Приклад 1.
Учасники шахового турніру грають у залі, де є 8 столів. Скількома способами можна розмістити шахістів, якщо учасники всіх партій відомі?
Розв'язання.
За умовою пари шахістів відомі. Тому достатньо розділити столи між 8 парами, а це можна зробити $P_8 = 8! = 40320$ способами.
Відповідь: 40320.

Приклад 2.
Скільки різних правильних дробів можна скласти із чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 так, щоб у кожен дріб входило два числа?
Розв'язання.
Дроби, у яких чисельник не дорівнює знаменнику можна скласти A_8^2 штук, але лише половина з них правильні. Отже, маємо

$$\frac{1}{2}A_8^2 = \frac{56}{2} = 28$$

дробів.
Відповідь: 28.

Приклад 3.
Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти із цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 так, щоб у кожному числі була цифра 1? *(Цифри в числі не повинні повторюватися).*
Розв'язання.
Чисел, в яких одиниця стоятиме на першому місці, буде A_7^3, якби в даний набір цифр не входив би нуль. Тому необхідно вилучити ті числа, де нуль стоїть на першому місці, а їх - A_6^2. Отже, маємо:

$$A_7^3 + 3(A_7^3 - A_6^2) = 7 \cdot 6 \cdot 5 + 3 \cdot (7 \cdot 6 \cdot 5 - 6 \cdot 5) = 750$$

чисел.
Відповідь: 750.

Приклад 4.
Скільки різних звукосполучень можна взяти на десяти вибраних клавішах роялю, якщо кожне звукосполучення може містити від трьох до десяти звуків?
Розв'язання.
Очевидно, що нам необхідно знайти суму

$$C_{10}^3 + C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6 + C_{10}^7 + C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10}$$

Скористаємося властивістю $C_n^m = C_n^{n-m}$.
Маємо:
$$C_{10}^3 = C_{10}^7; C_{10}^4 = C_{10}^6; C_{10}^8 = C_{10}^2; C_{10}^9 = C_{10}^1$$
Тому шукана кількість звукосполучень дорівнює:

$2(C_{10}^3 + C_{10}^4) + C_{10}^5 + C_{10}^2 + C_{10}^1 + C_{10}^{10} = 2(120 + 210) + 252 + 45 + 10 + 1 = 968.$

Відповідь: 968**.**

Приклад 5.
Знайти наближене значення степеня $0,97^5$.
Розв'язання.
Використаємо біном Ньютона

$$0,97^5 = (1 - 0,03)^5 = (1 + (-0,03)^5) = 1 - 5 \cdot 0,03 =$$

$$= 10 \cdot 0,03^2 - 10 \cdot 0,03^2 + 5 \cdot 0,03^4 - 0,03^5.$$

Знайдемо суму перших трьох членів, отримаємо 0,659 із похибкою 0,001.
Відповідь: $0,659$**.**

Приклад 6.
Для освітлення зали може бути увімкнена кожна із 10 ламп. Скільки існує різних способів освітлення зали?
Розв'язання.
Очевидно, стільки, скільки існує підмножин у десятиелементної множини, тобто $2^{10} = 1024$.
Відповідь: 1024**.**

Приклад 7.
Скільки різних варіантів хокейної команди можна скласти з 9 нападаючих, 5 захисників та 3 воротарів, якщо до складу команди повинні увійти 3 нападаючі, 2 захисники та 1 воротар?
Розв'язання.
Із 9 нападаючих можна вибрати трьох C_9^3 різними способами. З трьох воротарів можна вибрати одного воротаря трьома способами. Комбінуючи кожну трійку нападаючих із парами захиснмків, дістаємо $C_9^3 \cdot C_5^2$ різних команд без воротарів. Комбінуючи ці команди з кожним із воротарів, маємо:
$$C_9^3 \cdot C_5^2 \cdot 3 = \frac{9! \cdot 5! \cdot 3!}{6! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2!} = 2880$$

різних команд.
Відповідь: 2880.

Приклад 8.
У одній вазі лежать 5 яблук, а в другій - 8 мандаринів. Скількома способами можна вибрати яблуко або мандарин?
Розв'язання.
Одне яблуко можна вибрати п'ятьма способами, а один мандарин - іншими вісьмома способами. Тоді яблуко або мандарин можна вибрати $5+8=13$ способами.
Відповідь: 13.

Приклад 9.
У магазині є три види ручок і два види олівців. Скільки різних комплектів, які складаються із ручки і олівця, можна придбати в цьому магазині?
Розв'язання.
$3 \cdot 2 = 6$ різних комплектів.
Відповідь: 6.

Приклад 10.
Для проведення іспиту створюється комісія із двох викладачів. Скільки різних комісій можна скласти із п'яти викладачів?
Розв'язання.

$$C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

комісій.
Відповідь: 10.

Приклад 11.
Розподілити роботу у шести класах між трьома вчителями, щоб кожний із них працював у двох класах. Скількома способами можна це зробити?
Розв'язання.

$$C_6^2 \cdot C_4^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6 \cdot 5 \cdot 3 = 90.$$

способами.
Відповідь: 90.